F7414

BULETINUL ȘTIINȚIFIC ȘI TEHNIC AL INSTITUTULUI POLITEHNIC „TRAIAN VUIA" TIMIȘOARA

244

MATEMATICĂ—FIZICĂ

Tomul 26 (40) Fascicola 1

IANUARIE–IUNIE
1981

Cititorii din străinătate se pot abona prin

ILEXIM,

Serv. Export-import presă – Press Department

str. 30 Decembrie nr. 3–5 – P.O.B. 136–137

Bucharest – Romania

BULETINUL ȘTIINȚIFIC ȘI TEHNIC
AL
INSTITUTULUI POLITEHNIC „TRAIAN VUIA"
TIMIȘOARA

SERIA MATEMATICĂ—FIZICĂ

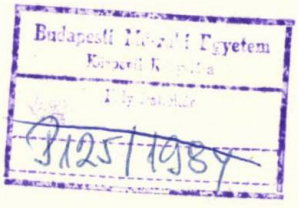
Tom 26 (40) Fascicola 1

IANUARIE—IUNIE
1 9 8 1

1989

COMITETUL DE REDACŢIE

Acad. prof. dr. doc. ing. IOAN ANTON, Prof. dr. ing. GHEORGHE CREŢU. Prof. em. dr. doc. ing. GHEORGHE SILAŞ – redactor şef, Prof. em. ing. CONSTANTIN AVRAM, m.c. al Acad. R.S.R., Prof. dr. ing. DUMITRU BECHERESCU, Prof. dr. ing. VASILE COCHECI, Prof. dr. BORISLAV CRSTICI, Prof. dr. ing. COLETA DE SABATA, Prof. dr. ing. TOMA DORDEA. Prof. dr. ing. TRAIAN NICOARĂ, Prof. dr. ing. FRANCISC KOVACS, Acad. prof. dr. ing. DAN MATEESCU, Prof. dr. ing. TIBERIU MUREŞAN, Prof. dr. ing. IOAN NIŢA, Prof. em. dr. ing. GHEORGHE SAVII Prof. dr. doc. ing. CONSTANTIN ŞORA, Prof. dr. ing. LIVIU BRÎNDEU – secretar de colegiu



COMITETUL DE REDACŢIE

I. *Matematică-fizică*

Prof. dr. BORISLAV CRSTICI–redactor responsabil, Prof. dr. ing. COLETA DE SABATA, Prof. dr. ing. MARIUS BORNEAS – red. resp. adj., Prof. dr. OCTAV E. GHEORGHIU, Conf. dr. EUGEN BURLACU – secretar de redacţie

BULETINUL ŞTIINŢIFIC ŞI TEHNIC

AL

INSTITUTULUI POLITEHNIC „TRAIAN VUIA" TIMIŞOARA

Tom 26 (40) Fascicola 1 ianuarie-iunie 1981

MATEMATICĂ—FIZICĂ

1. *P. N. Izvercean* — Operatori pe algebre cu bază ciclică 5

2. *Ioana Istrăţescu*— Asupra existenţei punctelor fixe pentru aplicaţii cu iterate contractive 9

3. *N. N. Neamţu, I. Goleţ* — Aplicaţii ale transformatei Laplace discrete la rezolvarea unor ecuaţii integrale discrete 13

4. *M. Turinici* — O clasă de metrici proiective pe spaţii liniare ordonate 19

5. *Carmencita Urosu* — Ideale de algebre universale 27

6. *Carmencita Urosu* — W-subalgebre ale algebrelor universale 31

7. *Carmencita Urosu* — S-congruenţe în varietăţi regulate de algebre universale 35

8. *St. I. Maksay* — Mişcări cu alunecare în aproximaţia a doua pe o placă plană 39

9. *Gh. Suciu* — Hipergrafuri ν — conexe 41

10. *Gh. Atanasiu, F. Klepp* — Conexiuni Finsler aproape de contact 45

11. *B. G. Pachpatte* — Asupra unei familii de noi tipuri de aplicaţii contractive în spaţii metrice 53

12. *St. Matei* — Asupra restului în calculul numeric al unor integrale duble 57

13. *B. Rendi* — Structuri diferenţiabile şi spaţii tangente I 63

14. *I. Damian, Minerva Cristea, M. David, I. Miron* — Contribuţii privind utilizarea traductorilor rezistivi la temperaturi joase 67

15. *Minerva Cristea, I. Damian, I. Miron, M. David* — Asupra aplicării efectului Seebeck la măsurarea temperaturilor joase 71

16. *V. T. Dorobanţu T. Palade* — Formă cubică pentru puţerea electronisă de stopare 75

17. *V. T. Dorobanţu* — Asupra factorului de atenuare $F(\tau)$ 79

18. *P. Crăciun* — Influenţa substanţelor adsorbite asupra electroluminiscenţei P.V.C 85

19. *P. Crăciun, C. Buca* — Asupra unei relaţii dintre indicele de refracţie, temperatura şi concentraţia soluţiilor apoase de NaCl. 91

BULETIN SCIENTIFIQUE ET TECHNIQUE
DE
L'INSTITUT POLYTECHNIQUE „TRAIAN VUIA" TIMIŞOARA

Tom 26 (40) Fascicule 1 Janvier—Juin 1981

MATEMATIQUE—PHYSIQUE

BME KÖZPONTI KÖNYVTÁR FOLYÓIRAT OSZTÁLY
1494

1. *P. N. Izvercean* — Operators on algebras with cyclic base 5

2. *Ioana Istratescu* — On the existence fixed points for mappings with a contractive iterate 9

3. *N. N. Neamţu, I. Golei* — Laplace transform applications to solving some discretes integral equations 13

4. *M. Turinici* — A class of proiective metrics on ordered linear spaces 19

5. *Carmencita Urosu* — Ideals des algèbres universelles 27

6. *Carmencita Urosu* — W-subalgèbres des algèbres universelles 31

7. *Carmencita Urosu* — S-congruences dans une variété des algèbres universelles 35

8. *St. I. Maksay* — Slip movements in the second approximation on a plane plate 39

9. *Gh. Suciu* — ν-conexes hypergraphes 41

10. *Gh. Atanasiu, F. Klepp* — Almost contact Finsler connections 45

11. *B. G. Pachpatte* — On a family of new contractive type mappings in metric spaces. 53

12. *St. Matei* — Über die restbestimmung in der numerischen berechnung einiger doppellintegrale. 57

13. *B. Rendi* — Differentiable structures and tangent spaces 63

14. *I. Damian, Minerva Cristea, M. David, I. Miron* — Contributions concernant l'utilisation des traducteurs résistifs pour les basses températures 67

15. *Minerva Cristea, I. Damian, I. Miron, M. David* — Sur l'application de l'éffet Seebeck à la mesure de basses temperatures 71

16. *V. T. Dorobanţu, T. Palade* — A cubic form for the electronic stopping power 75

17. *V. T. Dorobanţu* — On the attenuation factor $F(\tau)$ 79

18. *P. Crăciun* — L'influence des substances adsorbes sur l'electroluminescence du P.V.C 85

19. *P. Crăciun, C. Buca* — Sur une relation entre l'indice de réfraction, temperature et concentration des solutions liquides de NaCl. 91

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara

Tom 26 (40) **Fascicola 1—1981**

SERIA MATEMATICĂ-FIZICĂ

OPERATORI PE ALGEBRE CU BAZĂ CICLICĂ

DE

P. N. IZVERCIAN

Primită la redacţie 22 X 1979

Fie H_φ o algebră polinomială generată de un polinom $\varphi \in \mathbb{R}[\lambda]$ şi m_φ algebra de matrice, izomorfă cu H_φ, generată de matricea M ataşată polinomului φ. O funcţie $F : V \subseteq H_\varphi \to H_\varphi$ având domeniul şi codomeniul în H_φ este de forma

$$F(x) = \sum_{i=0}^{n-1} U_i(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \cdot e^i$$

unde e^i, $i=\overline{0, n-1}$ este o bază (ciclică) a algebrei iar $U_i : V^* \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i=\overline{0, n-1}$ [1].

1. Fie operatorul

$$\mathbb{D} = E\frac{\partial}{\partial x_0} + M\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + M^{n-1}\frac{\partial}{\partial x_{n-1}} \tag{1}$$

unde E este matricea unitate.

Definiţia 1.1. Sistemul de funcţii $\mathbb{F} = \| U_0, U_1, \ldots, U_{n-1} \|^T$ se numeşte cvasivector.

Definiţia 1.2. Dacă cvasivectorul $\mathbb{F} = \| U_0, U_1, \ldots, U_{n-1} \|^T$, $U_i \in C^1[V^*]$ $i=\overline{0, n-1}$ satisface în V ecuaţia $\mathbb{D}\mathbb{F} = \mathbb{O}$, $\mathbb{F}$ se numeşte cvasivector H olomorf în V.

În continuare algebrele H_φ vor fi presupuse ca fiind semisimple. Pentru început vom trata un caz particular interesant şi anume cazul în care algebra H_φ este o algebră generată de un polinom de forma $\varphi = \lambda^3 - 1$.

Fie $\mathbb{F} = \| U_0, U_1, U_2 \|^T$, $U_i : V^* \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $i=\overline{0, 2}$, $V \subseteq H$ un cvasivector.

Teorema 1.1. Dacă cvasivectorul $\mathbb{F}$ este H-olomorf în V atunci componentele sale U_i, $i=\overline{0, 2}$ verifică următorul sistem de ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întîi şi omogen,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U_0}{\partial x_0} + \dfrac{\partial U_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial U_2}{\partial x_2} = 0 \\ \dfrac{\partial U_0}{\partial x_1} + \dfrac{\partial U_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial U_2}{\partial x_0} = 0 \\ \dfrac{\partial U_0}{\partial x_2} + \dfrac{\partial U_1}{\partial x_0} + \dfrac{\partial U_2}{\partial x_1} = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Demonstrație. Operatorul $\mathbb{D}=E\frac{\partial}{\partial x_0}+M\frac{\partial}{\partial x_1}+M^2\frac{\partial}{\partial x_2}$ se poate scrie și sub forma,

$$\mathbb{D}=\left\|\begin{array}{ccc}\frac{\partial}{\partial x_0} & \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2}\\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_0} & \frac{\partial}{\partial x_1}\\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_0}\end{array}\right\|$$

Atunci ecuația $\mathbb{D}\mathbb{F}=\mathbb{O}$ este echivalentă cu sistemul (2).

Definiția 1.3. Operatorul

$$\Delta_3=\frac{\partial^3}{\partial x_0^3}+\frac{\partial^3}{\partial x_1^3}+\frac{\partial^3}{\partial x_2^3}-3\frac{\partial^3}{\partial x_0\partial x_1\partial x_2}$$

se numește operatorul lui P. Humbert.

Teorema 1.2. Componentele U_i, $i=\overline{0,2}$ ale cvasivectorului $\mathbb{F}$ de clasă $C^3[V^*]$, H-olomorf în V, sînt funcții H-armonice în V^*.

Demonstrație. Eliminînd pe U_1, U_2 din sistemul de ecuații (1) obținem că U_0 este o soluție particulară a ecuației $\Delta_3\psi=0$.

2. Fie H_φ o algebră polinomială generată de un polinom de forma $\varphi=\prod_{i=1}^{3}(\lambda-\lambda_i)$, $\lambda_i\neq\lambda_j$ pentru $i\neq j$. Atunci $H=\bigoplus_{i=1}^{3}H_i$, $H_i\simeq R$ sau $H_\varphi=H_1\oplus H_2$ unde $H_1\simeq R$ iar $H_2\simeq C$.

Operatorul $\mathbb{D}=E\frac{\partial}{\partial x_0}+M\frac{\partial}{\partial x_1}+M^2\frac{\partial}{\partial x_2}$ se poate scrie și sub forma:

$$\mathbb{D}=\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial}{\partial x_0}+\lambda_i\frac{\partial}{\partial x_1}+\lambda_i^2\frac{\partial}{\partial x_2}\right)M_i$$

unde M_1, M_2, M_3 sînt matricele componente ale lui M iar λ_1, λ_2, λ_3 sînt zerourile polinomului φ.

Aceste considerații ne permit să introducem, în mod natural, următorii operatori:

$$\delta_i=\frac{\partial}{\partial x_0}+\lambda_i\frac{\partial}{\partial x_1}+\lambda_i^2\frac{\partial}{\partial x_2},\quad i=\overline{1,3} \tag{3}$$

Operatorii δ_i se numesc operatori conjugați.

Definiția 2.1. Operatorul

$$\Delta_3^*=\delta_1(\delta_2(\delta_3)) \tag{4}$$

se numește operatorul generalizat al lui P. Humbert.

Teorema 2.1. Componentele U_i, $i=\overline{0,2}$ ale cvasivectorului $\mathbb{F}$ de clasă $C^3[V^*]$, H-olomorf în V, sînt funcții H-armonice generalizate în V^*.

Într-adevăr eliminînd pe U_1, U_2 din sistemul $\mathbb{D}\mathbb{F}=0$ obținem că U_0 este o soluție particulară a ecuației $\Delta^*\psi=0$. Sub forma (4) ecuația $\Delta_3^*\psi=0$ se recuce la $\Delta_3^*\psi=\dfrac{\partial^2\psi}{\partial\omega_1\partial\omega_2\partial\omega_3}=0$ unde $\omega_i=x_0+\lambda_i x_1+\lambda_i^2 x_2$, $i=\overline{1,3}$.

Observație. Ecuația $\Delta_2\psi=\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x_0}+\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2}-\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x_0\partial x_1}-\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x_0\partial x_2}-\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x_1\partial x_2}=0$ se reduce la $\Delta_2\psi=\delta_2(\delta_3\psi)=0$, respectiv $\Delta_2\psi=\dfrac{\partial^2\psi}{\partial\omega_2\partial\omega_3}=0$.

3. În general, fie H_φ o algebră polinomială generată de un polinom de forma $\varphi=\prod_{i=1}^{n}(\lambda-\lambda_i)$, $\lambda_i\neq\lambda_j$ pentru $i\neq j$ și m_φ algebra de matrice izomorfă cu H_φ generată de matricea M atașată polinomului φ. Fie $F: V\subseteq H_\varphi\to H_\varphi$ și $\mathbb{F}=\|U_0, U_1, \ldots, U_{n-1}\|^T$, $U_i\in C^1[V^*]$, $i=\overline{0,n-1}$ un cvasivector. Analog $\mathbb{F}$ se numește cvasivector H-olomorf în V dacă $\mathbb{D}\mathbb{F}=\mathbb{O}$, unde $\mathbb{O}$ este matricea nulă.

Operatorul (1) se poate scrie și sub forma,

$$\mathbb{D}=M_1\left(\frac{\partial}{\partial x_0}+\lambda_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\ldots+\lambda_1^{n-1}\frac{\partial}{\partial x_{n-1}}\right)+\ldots+M_n\left(\frac{\partial}{\partial x_0}+\lambda_n\frac{\partial}{\partial x_1}+\right.$$
$$\left.+\ldots+\lambda_n^{n-1}\frac{\partial}{\partial x_{n-1}}\right)$$

unde M_i, $i=\overline{1,n}$ sînt matricele componente ale matricei M.

Definiția 3.1 Operatorii

$$\delta_i=\frac{\partial}{\partial x_0}+\lambda_i\frac{\partial}{\partial x_1}+\ldots+\lambda_i^{n-1}\frac{\partial}{\partial x_{n-1}},\quad i=\overline{1n} \tag{5}$$

se numesc operatori conjugați.

Teorema 3.1. Componentele U_i, $i=\overline{0,n-1}$, ale cvasivectorului $\mathbb{F}$ de clasă $C^n[V^*]$, H-olomorf în V, sînt funcții H-armonice generalizate în V^*.

Într-adevăr, componentele U_i, $i=\overline{0,n-1}$, ale cvasivectorului $\mathbb{F}$ sînt soluții particulare ale ecuației,

$$\Delta_n^*\psi=\delta_1(\delta_2(\ldots\delta_n)\psi=0 \tag{6}$$

Sub această formă ecuația (6) se reduce la $\Delta_n^*\psi=\dfrac{\partial^n\psi}{\partial\omega_1\partial\omega_2\ldots\partial\omega_n}=0$ unde $\omega_x=x_0+\lambda_k x_1+\lambda_k^2 x_2+\ldots+\lambda_k^{n-1}x_{n-1}$, $k=\overline{1,n}$.

BIBLIOGRAFIE

1. Creangă I., Enescu I., Algebre, Editura Tehnică, București 1973.
2. Roșculeț M., Funcții monogene pe algebre comutative, Editura Academiei R.S.R. București, 1957.
3. Pascali D., Cuaternioni olomorfi, St. cerc. mat. XII.1. 171—174, 1961.
4. Izvercian P. N., Fuister C., Funcții H-olomorfe pe algebre cu radical, (în curs de apariție în Buletinul I.P.T), 1979.

ZUSAMMENFASSUNG

In dieser Arbeit werden einige Ergebnisse, mit Hilfe des Operators (1), aus der Theorie der Funktionen mit komplexer Variablen, übertragen.

Buletinul ştiinfific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara

Tom 26 (40) **Fascicola 1—1981**

SERIA MATEMATICĂ-FIZICĂ

ASUPRA EXISTENŢEI PUNCTELOR FIXE PENTRU APLICAŢII CU ITERATE CONTRACTIVE

DE

IOANA ISTRĂŢESCU

Primită la redacţie în 8 XII 79

1. Se ştie că în spaţii metrice complete principiul contracţiilor al lui Banach [1] asigură existenţa şi unicitatea unui punct fix pentru orice contracţie. Ulterior s-a constatat [5, 4] că acest rezultat are loc pentru aplicaţii continue şi cu o iterată contractivă sau local contractivă [2, 7]. Pentru prima clasă în [2] se arată că ipoteza de continuitate poate fi eliminată şi există exemple simple de aplicaţii necontinue cu iterate contractive.

Pornind de la importanţa acestor rezultate în teoria funcţiilor şi în teoria operatorilor cu aplicaţii la rezolvarea unor ecuaţii diferenţiale sau integro-diferenţiale ne propunem să arătăm că ipoteza de continuitate este superfluă şi în cazul local contracţiilor pe spaţii metrice complete, pe spaţii liniare local convexe sau chiar pe structuri probabiliste.

2. **Teorema 1.** Fie (X, d) un spaţiu metric complet şi $f : X \to X$ o aplicaţie care satisface condiţia că există un $k \in (0, 1)$ astfel încît pentru fiecare $x \in X$ există un număr natural $n(x)$ cu proprietatea că oricare ar fi $y \in X$ avem că

$$d(f^{n(x)}(y), f^{n(x)}(x)) \leqslant k d(x, y)$$

Atunci f are un punct fix unic $u \in X$ şi oricare ar fi $v \in X$ avem că

$$f^n(v) \to u \text{ pentru } n \to \infty.$$

Demonstraţie. Fie $x_0 \in X$, $m_0 = n(x_0)$, $x_1 = f^{m_0}(x_0)$ şi prin inducţie, ca şi în [7] se poate defini $m_i = n(x_i)$, $x_{i+1} = f^{m_i}(x_i)$ şi se arată că $x_n \to u$ pentru $n \to \infty$. Să arătăm că $f(u) = u$ şi pentru aceasta arătăm mai întîi că $f^{n(u)}(x_m) = y_m \to f^{n(u)}(u)$ pentru $m \to \infty$, căci avem

$$d(f^{n(u)}(x_m), f^{n(u)}(u)) \leqslant k d(x_m, u) \to 0 \text{ pentru } m \to \infty.$$

Pe de altă parte observăm că putem scrie

$$d(f^{n(u)}(u), u) \leqslant d(f^{n(u)}(u), f^{n(u)}(x_i)) + d(f^{n(u)}(x_i), u)$$

în care pentru i suficient de mare, $d(f^{n(u)}(u), f^{n(u)}(x_i)) < \frac{\varepsilon}{3}$. De asemenea avem că

$$d(f^{n(u)}(x_i), x_i) = d(f^{n(u)} f^{m_i - 1}(x_{i-1}), f^{m_i - 1}(x_{i-1})) =$$

$$= d(f^{m_i - 1} f^{n(u)}(x_{i-1}), f^{m_i - 1}(x_{i-1})) \leqslant k d(f^{n(u)}(x_{i-1}), x_{i-1}) \leqslant$$

$$\leqslant k^i d(f^{n(u)}(u), u) < \frac{\varepsilon}{3}$$

dacă i este suficient de mare. Deci

$$d(f^{n(u)}(x_i),\ u) \leqslant d(f^{n(u)}(x_i),\ x_i)+d(x_i,\ u) < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}$$

şi putem scrie că $f^{n(u)}(u)=u$ ceea ce asigură existenţa unui punct fix u pentru $g=f^{n(u)}$.

Pentru a demonstra unicitatea punctului fix să observăm că dacă ar exista două puncte fixe u şi v, $u \neq v$, am avea că

$$d(u, v)=d(g(u),\ g(v))=d(f^{n(u)}(u),\ f^{n(v)}(v)) \leqslant kd(u, v)$$

Dacă $d(u, v) \neq 0$, prin împărţirea relaţiei de mai sus cu această cantitate obţinem $1 \leqslant k$ ceea ce este o contradicţie şi deci ipoteza este falsă.

Din unicitatea unui punct fix u cu proprietatea că $f^{n(u)}(u)=u$ deducem că u este şi un punct fix pentru f deoarece putem scrie că

$$f(u)=f(f^{n(u)}(u))=f^{n(u)}(f(u))$$

deci $f(u)$ este punct fix pentru $f^{n(u)}$. Cum $f^{n(u)}$ nu are decît un singur punct fix u rezultă $f(u)=u$ şi teorema este demonstrată.

3. Fie X un spaţiu liniar topologic Hausdorff şi local convex iar $\mathcal{P}$ o familie de seminorme care generează topologia respectivă de pe spaţiul X. Vom avea

Teorema 2. Fie $D \subset X$ o parte a lui X secvenţial completă iar $f: D \to D$ o aplicaţie care are proprietatea că pentru orice $x \in D$ şi $p \in \mathcal{P}$ există un număr natural $n_p(x)$ şi $\gamma_p \in [0, 1)$ astfel încît să avem că

$$p(f^{n_p(x)}(x)-f^{n_p(x)}(y)) \leqslant \gamma_p\, p(x-y)$$

oricare ar fi $y \in D$. Atunci f are un punct fix unic $u \in D$ şi $f^m(v) \to u$ pentru orice $v \in D$ şi $m \to \infty$.

Demonstraţie. Fie $\mathcal{U}$ sistemul de vecinătăţi ale originii obţinute cu ajutorul lui $\mathcal{P}$. Atunci dacă $U \in \mathcal{U}$ rezultă că există un număr finit de seminorme $p_1, \ldots, p_k$ şi numerele reale $r_1, \ldots, r_k$ astfel în cît să avem că $U=\bigcap_{i=1}^{k} r_i V(p_i)$ unde $V(p)=\{x : p(x) < 1\}$.

Fie $x \in D$ şi $U \in \bigcap_{i=1}^{k} r_i V(p_i)$ date. Dacă $n > m$ vom putea scrie că $n=s_i n_i(x)+r_i$, $m=t_i n_i(x)+q_i$, $i=1, 2, \ldots, k$ cu $s_i > t_i$ şi pe de altă parte avem că

$$p_i(f^n(x)-f^m(x))=p_i(f^{s_i n_i(x)+r_i}(x)-f^{t_i n_i(x)+q_i}(x)) \leqslant$$

$$\leqslant p_i(f^{s_i n_i(x)+r_i}(x)-f^{t_i n_i(x)}(x))+p_i(f^{t_i n_i(x)}(x)-f^{t_i n_i(x)+q_i}(x)) \leqslant$$

$$\leqslant \gamma^{t_i}\{p_i(f^{(s_i-t_i)n_i(x)+r_i}(x)-x)+p_i(f^{q_i}(x)-x)\}$$

Dar pentru $j \geqslant 2$ putem scrie că

$$p_i(f^{j \cdot n_i(x)}(x)-x) \leqslant (1-\gamma_i)^{-1} p_i(f^{n_i(x)}(x)-x), \quad i=1, 2, \ldots, k$$

şi prin urmare avem că

$$p_i(f^n(x)-f^m(x)) \leqslant \gamma_i^{t_i}\{\gamma_i^{s_i-t_i} p_i(f^{r_i}(x)-x)+p_i(f^{(s_i-t_i)n_i(x)}(x)-x)+$$

$$+p_i(f^{q_i}(x)-x)\} \leqslant \gamma_i^{t_i}(\gamma_i^{s_i-t_i} p_i(f^{r_i}(x)-x)+(1-\gamma_i)^{-1} p_i(f^{n_i(x)}(x)-x)+$$

$$+p_i(f^{q_i(x)}(x)-x)\}$$

Deoarece $p_i(f^{q_i(x)}(x_i)-x)$ este mărginită de $M_i=\max\{p_i(f(x)-x), p_i(f^2(x)-x), \ldots, p_i(f^{n_i(x)-1}(x)-x)\}$ atunci alegînd pe m (prin urmare pe t_i) suficient de mare ca să asigurăm că

$$\gamma_i^{t_i}\{\gamma_i^{s_i-t_i}p_i(f^{r_i}(x)-x)+(1-\gamma_i)^{-1}p_i(f^{n_i(x)}(x)-x)+$$

$$+p_i(f^{q_i(x)}(x)-x)\} \leqslant r_i \text{ pentru } i=1, 2, \ldots, k, \text{ avem că}$$

$$p_i(f^n(x)-f^m(x)) < r_i,\ i=1, 2, \ldots, k$$

adică $\{f^n(x)\}$ este un şir Cauchy în D şi deci convergent către un punct $u \in D$. Evident că $f(u)=u$ şi unicitatea punctului fix rezultă din ipoteza că X este un spaţiu Hausdorff.

4. Fie X un spaţiu liniar real iar $N: X \to \mathcal{D}$=mulţimea funcţiilor de repartiţie reale şi nenegative (funcţii reale F nedescrescătoare, continue la stînga cu sup $F=1$ şi inf $F=0$). Dacă notăm prin $N(x; t)$ valoarea lui N în x atunci N este normă aleatoare [8, 1] pe X dacă verifică următoarele condiţii:

1) $N(x; t)=1$ pentru orice $t>0$ dacă şi numai dacă $x=0$,
2) $N(x; 0)=0$ pentru orice $x \in X$,
3) $N(cx; t)=N(x; t/|c|)$ pentru orice număr real $c \neq 0$,
4) dacă $N(x; t)=1$ şi $N(y; s)=1$ atunci $N(x+y; t+s)=1$.

Vom numi spaţiu normat aleator tripletul (X, N, Min) în care avem că

$$N(x+y; s+t) \geqslant \text{Min}(N(x; t), N(y; s))$$

pentru orice $x, y \in X$ şi $s, t \geqslant 0$ şi vom avea.

Teorema 3. Dacă (X, N, Min) este un spaţiu normat aleator complet şi $f: X \to X$ o aplicaţie cu proprietatea că există $k \in [0, 1]$ astfel încît oricare ar fi $x \in X$ să existe un număr natural $n(x)$ astfel că pentru orice $y \in X$ să avem

$$N(f^{n(x)}(x)-f^{n(x)}(y); kt) \geqslant N(x-y; t) \text{ oricare ar fi } t>0$$

atunci f are un punct unic z şi $f^n(x) \to z$ oricare ar fi $x \in X$ şi $n \to \infty$.

BIBLIOGRAFIE

1. S. Banach. Sur les opérations dan les ensembles abstracts et leurs applications aux integrales, Fund. Math., 3(1922), 133—181.
2. V. M. Bryant, A remark on a fixed points theorem for iterated mappings, Amer. Math. Monthly, 75 (1968), 399—400.
3. G. L. Cain, Fixed points and stability of multifunctions on random normed spaces (to appear).
4. R. E. Edwards, Functional analysis. Theory and Appl., New York, 1965.
5. A. Kolmogorov and S. V. Fomin, Introduction to functional analysis, vol. I, Graylock, Paris, 1957.
6. K. Menger, Statistical metrics, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 28 (1942), 535—37.
7. V. M. Sehgal, A fixed point theorem for mappings with a contractive iterate, Proc. Amer. Math. Soc., 23(1969), 631—34.
8. A. N. Serstnev, The notion of random normed spaces, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 149(2), 1963, 280—283.

ON THE EXISTENCE OF FIXED POINTS FOR MAPPINGS WITH A CONTRACTIVE ITERATE

(SUMMARY)

It is known that each contraction mapping f on a complete metric space X has a unique fixed point x_0 ant the succesive approximations $\{f^n(x)\}$ converges to x_0 for each $x \in X$.

In the present note we investigate this problem for mappings which are not necessarily contractions. If f is a mapping with a contractive iterate on a metric space or on a linear locally convex space or on a particularly probabilistic structure, the existence of a unique fixed point and the succesive approximations are satisfied and the hypotheses of continuity is superfluous.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara

Tom 26 (40) **Fascicola 1—1981**

SERIA MATEMATICĂ-FIZICĂ

APLICAŢII ALE TRASFORMATEI LAPLACE DISCRETE LA REZOLVAREA UNOR ECUAŢII INTEGRALE DISCRETE

DE

N. NEAMŢU, I. GOLEŢ

Primită la redacţie 4 XII 1979

1. Numim şir original, un şir $\{x_m\}_{n\in N}$, $x_n \in \mathbb{C}$, care satisface condiţia

$$|x_n| \leqslant Me^{s_0 n},\ M>0,\ s_0 \geqslant 0,\ n\in\mathbb{N} \tag{1.1}$$

s_0 se numeşte indicele de creştere al şirului dat.

Se demonstrează uşor că mulţimea tuturor şirurilor original, notată cu O, este un spaţiu liniar.

Se numeşte transformată Laplace discretă a lui $\{x_n\}$, funcţia complexă $\mathcal{L}\{x_n\}$ definită prin

$$X_{(p)}=\mathcal{L}\{x_n\}=\sum_{n=0}^{\infty} x_n e^{-np},\ p=s+i\sigma\in\mathbb{C} \tag{1.2}$$

Domeniul în care funcţia $\mathcal{L}\{x_n\}$ este definită este precizat de :

Teorema 1. Dacă s_0, este indicele de creştere al şitului $\{x_n\}$, atunci transformata Laplace discretă $\mathcal{L}\{x_n\}$ este definită în semiplanul $\mathrm{Rep} > s_0$, este o funcţie olomorfă în acest semiplan, şi are loc

$$X(p)=[\mathcal{L}\{x_n\}]'=\sum_{n=0}^{\infty}(-nx_n)\,e^{-np} \tag{1.3}$$

Problema inversă, să se determine şirul original $\{x_n\}\, n\in\mathbb{N}$, cînd se cunoaşte imaginea sa Laplace discretă $\mathcal{L}\{x_n\}=X(p)$ este rezolvată de

Teorema 2. Dacă şirul original $s=\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ are indicele de creştere s_0, iar $X_{(p)}$ este imaginea sa, atunci

$$x_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\pi}^{s+i\pi} X_{(p)}e^{np}\mathrm{d}p,\ n\in\mathbb{N},\ s>s_0 \tag{1.4}$$

2. Se demonstrează uşor, de asemenea, următoarele teoreme :

Teorema 3. (asemănării). Dacă $X_{(p)}=\mathcal{L}\{x_n\}$ oricare ar fi $K\in\mathbb{N}$ avem :

$$\mathcal{L}\{x_{kn}\}=X\left(\frac{p}{k}\right) \tag{2.1}$$

Teorema 4. (întîrzierii). Întîrzierea $m\in\mathbb{N}$ se traduce prin înmulţirea imaginii cu e^{-mp}

$$\mathcal{L}\{x_{n-m}\}=e^{-mp}\,\mathcal{L}\{x_n\} \tag{2.2}$$

Teorema 5. (devansării). Dacă $\mathcal{L}\{x_n\}=X_{(p)}$ și $m \in \mathbb{N}$, atunci

$$\mathcal{L}\{x_{n+m}\}=e^{mp}\left[X_p - \sum_{k=0}^{m-1} x_k e^{-kp}\right] \tag{2.3}$$

Teorema 6. (deplasării). Dacă $\mathcal{L}\in x_n\}=X_{(p)}$ atunci

$$X(p-q)=\mathcal{L}\{e^{nq}x_n\} \tag{2.4}$$

Teorema 7. (derivării imaginii). Dacă $\mathcal{L}\{x_n\}=X_{(p)}$

$$X_{(p)}^{(k)}=\mathcal{L}\{(-n)^k x_n\} \tag{2.5}$$

Teorema 8. (integrării imaginii),

$$\int_p^\infty X_{(q)}dq=\mathcal{L}\left\{\frac{x_n}{n}\right\} \tag{2.6}$$

Teorema 9. (imaginea unui șir periodic). Dacă $\mathcal{L}\{x_n\}=X_{(p)}$ și șirul original $\{x_n\}$ este periodic de perioada $m \in \mathbb{N}^*$, $x_{n+m}=x_n$, $n \in \mathbb{N}$, atunci

$$X_{(p)}=\frac{1}{1-e^{-mp}} \sum_{n=0}^{m-1} x_n e^{-np} \tag{2.7}$$

Teorema 10. (produs a două imagini). Fie două șiruri original $\{x_n\}$ și $\{y_n\}$, avînd drept imagini pe $X_{(p)}$ și $Y_{(p)}$. Atunc $X_{(p)}\,Y_{(p)}$ este tot o imagine Laplace și are loc

$$X_{(p)}Y_{(p)}=\mathcal{L}\left\{\sum_{m=0}^{n} x_m y_{n-m}\right\} \tag{2.8}$$

Suma

$$\sum_{m=0}^{n} x_m y_{n-m}=(x*y)_n \tag{2.9}$$

fiind termenul general al unui șir original, numit produsul de convoluție al șirurilor $\{x_n\}$ și $\{y_n\}$.

Se demonstrează imediat că șirul cu termenul general $\{x_n y_n\}$ este un șir original dacă $\{x_n\}$ și $\{y_n\}$ sînt șiruri originale, avînd indicele de creștere suma indicilor s_1+s_2 și are loc

Teorema 11. (produs a două șiruri originale) Imaginea șirului produs $\{x_n y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ este

$$\mathcal{L}\{x_n y_n\}=\frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\pi}^{s+i\pi} X_{(q)}Y_{(q-p)}\,dq \tag{2.10}$$

definită pentru Rep $> s_1+s_2$.

Teorema 12. (prima teoremă de dezvoltare). Dacă $F(p)$ este imaginea Laplace discretă a șirului $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ și $F(p)$ este o funcție rațională în e^p

$$F(p)=\frac{F_1(e^p)}{F_2(e^p)}=\frac{a_0+a_1e^p+\ldots+a_me^{mp}}{b_0+b_1e^p+\ldots+b_ne^{up}},\quad m<n \tag{2.11}$$

și numitorul are rădăcinile simple: e^{p0}, e^{p1}, ... $e^{p}n-1$, atunci $F(p)$ este imaginea șirului original, cu termenul general

$$f_n=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{F_1(e^{pk})}{F_2'(e^{pk})}e^{(n-1)pk},\quad n\in\mathbb{N} \tag{2.12}$$

Teorema 13. (a doua teoremă de dezvoltare). Fie $F(p)$ o funcție rațională și e^{p} de forma (2.11) în care numitorul are rădăcinile $e^{p_1}, e^{p_2}, \ldots, e^{p_k}$ multiple respectiv de ordinul $H_1, H_2, \ldots, H_k$

$$H_1+H_2+\ldots+H_k=n$$

Atunci șirul original corespunzător are termenul general

$$\begin{cases} f_n=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{H_i}\frac{B_i^{(H_i-j)}}{(H_i-j)!}\left[\frac{\overset{-}{F}^{z-1}(n-1)}{(j-1)!}\,e^{(u-j)p_i}\right] \\ e^{(m-j)p_i}=0 \text{ pentru } n-j<0 \end{cases} \tag{2.13}$$

unde $\overset{n}{F}(x)=x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)$ este funcția factorial de ordinul n, iar

$$\overset{-n}{F}(x)=\frac{1}{x(x\ldots(x+n-1)}$$

este funcția factorial de ordinul $-n$.

$$F(p)=\frac{F_1(e^{p})}{F_2(e^{p})}=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{H_i}\frac{A_j,\ i}{(e^{p}-e^{p_i})}\ j$$

Din

$$B_i(e^{p})=(e^{p}-e^{p_i})^{H_i}F(p)=\sum_{j=1}^{H_i}A_j i\,(e-{}^{p}e^{p_i})^{H_i-j}+(e^{p}-e^{pi})^{H_i} \tag{2.14}$$

Făcînd $e^{p}=e^{p}$ de deduce

$$B_i(e^{pi})=A_{H_i},\ i$$

Derivînd succesiv (2.14) în raport cu e^{p}, și făcînd apoi $e^{p}=e^{pi}$ se obține

$$B_i'(e^{p_i})=A_{H_i-1},\ 1,\ B_i''(e^{p_i})=2!\,A_{H_i-2},\ i,\ \ldots,\ B_i^{(H_i-j)}=(H_i-j)!\,A_j, i$$

Dăm un tablou al unor imagini Laplace discrete uzuale :

I) $\delta=\{1,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ \ldots\}$ $\quad \mathcal{L}\delta=1$

II) $h=\{1,\ 1,\ 1,\ \ldots,\ 1,\ \ldots\}$ $\quad \mathcal{L}h=\frac{e^{p}}{e^{p}-1}$

III) $\mathcal{L}\{e^{na}\}=\frac{e^{p}}{e^{p}-e^{a}}$

IV) $\mathcal{L}\{\sin nw\}=\frac{e^{p}\sin w}{e^{2p}-2e^{p}\cos w+1}$

V) $\mathcal{L}\{\cos nw\}=\frac{e_a(e^{p}-\cos w)}{e^{2p}-2e^{p}\cos w+1}$

VI) $\mathcal{L}\{\mathrm{sh}\ nw\}=\frac{e^{p}sh\ w}{e^{2p}-ep^{p}\,ch\,w+1}$

VII) $\mathcal{L}\{\mathrm{ch}\ nw\}=\frac{e^{p}(e^{p}-scw)}{e^{-p}-2e^{p}\mathrm{ch}\ w+1}$

VIII) $\mathcal{L}\{n\}=\frac{e^{p}}{(e^{p}-1)^2}$

IX) $\mathcal{L}\{n^2\}=\frac{e^{p}(e^{p}+1)}{(e^{p}-1)^3}$

Se știe că [2] o ecuație de forma (3.1) $ax(t)=f(t)+\lambda\int_{\alpha}^{t}k(t,\tau)x(\tau)\,d\tau$ se numește ecuație integrală a lui Volterra de prima speță dacă $a=0$ și de speța a doua dacă $a\neq 0$.

Dacă nucleul ecuației $k(t,\tau)$ depinde numai de diferența $t-\tau$, adică $k(t,\tau)=k(t,\tau)$ atunci integrala

$$\int_0^t k(t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau=k(t)*x(t)$$

este tocmai produsul de convoluție a funcțiilor $k(t)$ și $x(t)$.

În acest caz ecuația lui Volterra

$$ax(t)+f(t)+\lambda\int_0^t k(t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau \tag{3.2}$$

este de tip convoluție și soluția ei poate fi găsită prin metoda operațională.

În cele ce urmează vrem să aplicăm transformata Laplace discretă pentru analogul discret al ecuației (3.2)

Fie ecuația :

$$ax_n=f_n+\lambda\sum_{k=0}^{n}x_k g_{n-k} \tag{3.3}$$

pe care o vom numi ecuația *integrală liniară Volterra de tip discret*, g_{n-k} numindu-se nucleul său.

Dacă șirul necunoscut $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, șirurile cunoscute $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sînt șiruri original atunci, aplicînd transformata Laplace discretă (1.2) și ținînd seama de Teorema 10 (produs a două imagini) obținem :

$$aX_{(p)}=F(p)+\lambda G(p)\,X_{(p)}, \tag{3.4}$$

am notat

$$\mathcal{L}\{x_n\}=X_{(p)},\quad \mathcal{L}\{f_n\}=F(p)\ \text{și}\ \mathcal{L}\{g_n\}=G(p)$$

adică

$$X(p)=\frac{1}{a}F(p)+\frac{\lambda}{a}\frac{G(p)}{a-\lambda G(p)}F(p)$$

cu notațiile :

$$\frac{G(p)}{a-\lambda G(p)}=H(p)\ \text{și}\ \mathcal{L}\{h_n\}=H(p)$$

avem

$$X(p)=\frac{1}{a}F(p)+\frac{\lambda}{a}F(p)\,H(p)$$

Prin aplicarea transformatei Laplace inverse (Teorema 2) se obține :

$$x_n=\frac{1}{a}f_n+\frac{\lambda}{a}f_n*g_n \tag{3.5}$$

care reprezintă soluția ecuației (3.3).

În particular, dacă nucleul g_n este un polinom de grad l în n,

$$g_n=g_0n^l+a_1n^{l-1}+\ldots+a_l$$

folosind formula de interpolare a lui Newton, avem

$$g_n = g_0 + \frac{\Delta g_0}{1!} F(n) + \ldots + \frac{\Delta^l g_0}{l!} F^l(n) = \sum_{m=0}^{l} \frac{\Delta^m g_0}{m!} F^m(n) \tag{3.6}$$

Avînd în vedere că

$$\mathcal{L}\left\{ \frac{F(n-1)^k}{k!} e^{(n-k-1)e} \right\} = \frac{1}{(e^p - e^a)^{k+1}} \tag{3.7}$$

găsim imaginea Laplace

$$\mathcal{L}\{g_n\} = G(p) = \sum_{m=0}^{l} \frac{\Delta^m g_0}{m!} \frac{(l+1)!}{(l^p - 1)^{m+2}}$$

deci $H(p)$ este o funcţie raţională în e şi originalul său poate fi găsit aplicînd una din teoremele de dezvoltare.

4. **Exemple.**

Fie ecuaţia

$$x_n = e^n + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} (n-k)\, x_k \quad n \in \mathbb{N}$$

Ecuaţia operaţională corespunzătoare este :

$$X(p) = \frac{e^p}{e^p - e} + \frac{1}{2} \frac{e^p}{(e^p - 1)^2} X(p),$$

$$X(p) = \frac{2e^p (e^p - e)}{2e^{2p} - 5e^p + 2}$$

Făcînd împărţirea şi apoi descompunînd în fracţii simple în e^p obţinem

$$X(p) = 1 + \frac{2e-1}{6} \frac{1}{e^p - e^{\frac{1}{2}}} + \frac{4}{3}(2-e) \frac{1}{e^p - e^2}$$

Ţinînd seama de tabelul de mai sus avem

$$x_n = \begin{cases} 1 & \text{pentru } n = 0 \\ \dfrac{2e-1}{6} e^{\frac{n-1}{2}} + \dfrac{4}{3}(2-e)^{2(n-1)} & \text{pentru } n \geqslant 1 \end{cases}$$

b) Ecuaţia

$$x_n = \sin n + \sum_{k=0}^{n} x_k, \quad n \in \mathbb{N}$$

se mai poate scrie sub forma

$$0 = \sin n + \sum_{k=0}^{n-1} x_k$$

Folosind produsul de convoluţie, ea devine

$$x_n = \sin n + h_n * x_n$$

Trecînd la ecuaţia operaţională corespunzătoare avem

$$X(p)=\frac{e^p \sin 1}{e^{2p}-2e^p \cos 1+1}+\frac{e^p}{e^p-1}X(p)$$

cu soluţia

$$x_n=\begin{cases}-\sin 1 & \text{pentru } n=0\\ (1-2\cos 1)\sin n+\sin(n-1) & \text{pentru } n\geqslant 1\end{cases}$$

c) T. Fényes şi P. Kosik [1] consideră ecuaţia

$$nx_n+\sum_{k=0}^{n}x_k e^{n-k}=2ne^n$$

pe care o rezolvă prin altă metodă. O vom rezolva, folosind transformata Laplace discretă.

Din ecuaţiile rezultă că $x_0=0$.

Ţinînd seama de teorema derivării imaginii şi de teorema produsului a două imagini obţinem :

$$-X'(p)+\frac{e^p}{e^p-e}X_{(p)}=2\frac{e^{p+1}}{(e^p-e)^2}$$

ecuaţie diferenţială liniară şi neomogenă, de ordinul întîi, a cărei soluţie generală este :

$$X(p)=(e^p-e)\left(C+\frac{e^p}{(e^p-e)^2}\right)$$

Avînd în vedere o teoremă care afirmă că

$$\lim_{p\to\infty}(1-e^{-p})X_{(p)}=x_0,$$

rezultă că $C=0$

şi deci

$$X_{(p)}=\frac{e}{e^p-e}$$

Imaginea inversă a acestei ecuaţii este

$$x_n=\begin{cases}0 & \text{pentru } n=0\\ e^n & \text{pentru } n\geqslant 1\end{cases}$$

BIBLIOGRAFIE

1 Fenyes, T., Kosik, P., Studia Sci. Math. Hung. 7 (1972).
2 Haimovici, A., Ecuaţii diferenţiale şi integrale, Ed. Did. şi Ped. Bucureşti, 1965.
3. Myskis, D., A., Advanced Mathematics for Engineers, mir publishers, Moscow, 1965.
4. Nemţu, N., Transformata laplace discreta. Lucrare comunicată la Sesiunea cadrelor didactice ale Inst. polit. Timişoara, mai 1978.
5. Neamţu, N., Unele aplicaţii ale transformatei Laplace discrete, lucrare comunicată la Sesiunea cadrelor didactice ale Inst. polit. Timişoara, mai 1978.

SUMMARY

In this Note the principals formulae of the discret Laplacetransfomr-ore given.

Applaying these formulae one founds the solutions of the so called Voltterra equations of discrete type.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara
Tom 26 (40) Fascicola 1—1981
SERIA MATEMATICĂ-FIZICĂ

A CLASS OF PROJECTIVE METRICS ON ORDERED LINEAR SPACES

BY
M. TURINICI

Primită la redacţie 7 I 80.

1. Preliminaries

Throughout this note, $R_+=[0, +\infty[$ denotes the positive half-axis and $\bar{R}_+=[0, +\infty]$ (respectively, $R_+^0=]0, +\infty[$) denotes the extended (respectively, strict positive half-axis). Also, exp analog denote the exponential and logarithmic function, respectively.

Let X be a linear real space and let $X_+ \subset X$ be a nonempty, convex, pointed and archimedean cone, i.e.,

(*i*) $x, y \in X_+,\ \lambda, \mu \geqslant 0 \Rightarrow \lambda x+\mu y \in X_+$

(ii) $x, y \in X_+,\ x+y=0 \Rightarrow x=y=0$

(iii) $x, y \in X,\ x+\lambda y \in X_+\ (\forall \lambda > 0) \Rightarrow x \in X_+$

Denote $X_+^0=X_+ \setminus \{0\}$ and let $\leqslant$ be the ordering on X induced by the cone X_+ in the usual way

(iv) $x, y \in X,\ x \leqslant y$ iff $y-x \in X_+$

Now, let $M : X_+^2 \to \bar{R}_+$ be a mapping defined, for every $x, y \in X_+$ by

(v) $M(x, y)=\inf \{\lambda \geqslant 0 ;\ x \leqslant \lambda y\}$, if $\{\lambda \geqslant 0 ;\ x \leqslant \lambda y\} \neq \Phi$

$=+\infty$, if $\{\lambda \geqslant 0 ;\ x \leqslant \lambda y\}=\Phi$

Lemma 1.1. The mapping M has the following fundamental properties

$M(x, y)=0$ if and only if $x=0$ (1.1)

$M(x, x)=1$, for every $x \in X_+^0$ (1.2)

$x, y \in X_+,\ M(x, y) < +\infty \Rightarrow x \leqslant M(x, y)\, y$ (1.3)

$x, y, z \in X_+,\ M(x, y),\ M(y, z) < +\infty \Rightarrow M(x, z) \leqslant M(x, y)\, M(y, z)$ (1.4)

$M(x+y, z) \leqslant M(x, z)+M(y, z)$, for every $x, y, z \in X^+$ (1.5)

$M(\alpha x, \beta y)=(\alpha/\beta)\, M(x, y)$, for every $y, x \in X^+,\ \alpha, \beta > 0$ (1.6)

$x, y, z \in X_+,\ x \leqslant y \Rightarrow M(x, z) \leqslant M(y, z)$ (1.7)

Proof. Clearly, $M(0, y)=0$, for every $y \in X_+$. Conversely, let $x, y \in X_+$ be such that $M(x, y)=0$; then, $x \leqslant \lambda y,\ \forall \lambda > 0$ and so (from (iii)) $x=0$, proving

(1.1). Furthermore, let $x, y \in X_+$ satisfying $M(x, y) < +\infty$. Then, $x \leqslant y\lambda$ for any $\lambda > M(x, y)$, or, equivalently, $x - M(x, y)\, y \leqslant \mu y$, $\forall\, \mu > 0$; but then, (again from (iii)) $x - M(x, y)\, y \leqslant 0$, i.e., (1.3) holds. The remaining properties are imediate consequences of the definition (v) and so, our lemma is proved. Q.E.D.

A function $f : (R_+^0)^2 \to R_+^0$ is said to be M-compatible iff (a) $f(1, 1) = 1$, (b) $f(x, y) = f(y, x)$, for every $x, y \in R_+^0$, (c) $f(M(x, y), M(y, x)) \geqslant 1$, for every $x, y \in X_+$ satisfying $0 < M(x, y) < +\infty$, $0 < M(y, x) < +\infty$. Also, a function $f : (R_+^0)^2 \to R_+^0$ is said to be an admissible function off (a') $x_1, y_1, x_2, y_2 \in R_+^0$, $x_1 \leqslant x_2$, $y_1 \leqslant y_2 \Rightarrow f(x_1, y_1) \leqslant f(x_2, y_2)$, (b') $x_1, y_1, x_2, y_2 \in R_+^0 \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x_1 x_2, y_1 y_2) \leqslant f(x_1, y_1)\, f(x_2, y_2)$. If in addition (c') $f(x, y) = 1$ implies $x \leqslant 1$ and $y \leqslant 1$, then, f is said to be a completely admissible function.

For example, the function $f : ({}_+^0 R)^2 \to R_+^0$ defined by

$$f(x, y) = xy, \text{ for every } x, y \in R_+^0 \tag{1.8}$$

is a M-compatible and admissible (but not completely admissible) function. Indeed, if we suppose that $M(x, y)\, M(y, x) < 1$ for some $x, y \in X_+$ with $0 < M(x, y) < +\infty$, $0 < M(y, x) < +\infty$ then, by (1.2)+(1.4), $1 = M(x, x) \leqslant$ $\leqslant M(x, y)\, M(y, x) < 1$, a contradiction. So, $M(x, y)\, M(y, x) \geqslant 1$, for every $x, y \in X_+$ with $0 < M(x, y) < +\infty$, $0 < M(y, x) < +\infty$ and this completes practically, the proof of our assertion.

Another important example is that given by the function $f : (R_+^0)^2 \to R_+^0$ defined by

$$f(x, y) = \max(x, y), \text{ for every } x, y \in R_+^0 \tag{1.9}$$

More exactly, the function f defined by (1,9) is a M-compatible and completely admissible function. Since the second part of this assertion is almost evident, the only thing we have to do is to verify (c). To this end, let us suppose that $\max(M(x, y), M(y, x)) < 1$ for some $x, y \in X_+$ with $0 < M(x, y) < +\infty$, $0 < M(x, y) < +\infty$. Again from (1.2)+(1.4), $1 = M(x, x) \leqslant M(x, y)\, M(y, x) \leqslant$ $\leqslant (\max(M(x, y), M(y, x)))^2 < 1$, a contradiction. So, $\max(M(x, y), M(y, x)) \geqslant$ $\geqslant 1$, for every $x, y \in X_+$ with $0 < M(x, y) < +\infty$, $0 < M(y, x) < +\infty$, and this established our assertion.

Now, let $f : (R_+^0)^2 \to R_+^0$ be a M-compatible function. Define a mapping $\mathrm{d}_f : (X_+^0)^2 \to \bar{R}_+$ by

$$\text{(vi) } \mathrm{d}_f(x, y) = \log f(m(x, y), M(y, x)), \text{ if } M(x, y) < +\infty,\ M(y, x) < +\infty$$

$$= +\infty \quad , \text{ if } M(x, y) = +\infty \text{ or } M(y, x) = +\infty$$

for every $x\, y \in X_+^0$. The following fundamental result concerning this mapping may be stated.

Theorem 1.1. Suppose the M-compatible function f is, in addition, an admissible (respectively, completely admissible) function. Then, the associated mapping d_f is a generalized quasi-metric (respectively, a generalized metric) on X_+^0.

Proof. Firstly, from the properties (a)+(b) of the function f we get the immediate properties

$$\mathrm{d}_f(x, x) = 0, \text{ for every } x \in X_+^0 \tag{1.10}$$

$$\mathrm{d}_f(x, y) = \mathrm{d}_f(y, x), \text{ for every } x, y \in X_+^0 \tag{1.11}$$

Now, let $x, y, z \in X_+^0$ be such that $\mathrm{d}_f(x, y) < +\infty$, $\mathrm{d}_f(y, z) < +\infty$. From the definition (vi) we get $M(x, y) < +\infty$, $M(y, z) < +\infty$, $M(y, x) < +\infty$,

$M(z, y) < +\infty$ and so, from (1.4), $M(x, z) \leqslant M(x, y)\, M(y, z)$ and analogously, $M(z, x) \leqslant M(y, x)\, M(z, y)$. This fact, together with the properties (a')+(b') of the function f, implies

$$f(M(x, z),\ M(z, x)) \leqslant f(M(x, y)\, M(y, z),\ M(y, x)\, M(z, y)) \leqslant$$

$$f(M(x, y),\ M(y, x))\, f(M(y, z),\ M(z, y)),$$

and therefore,

$$d_f(x, y) < +\infty,\ d_f(y, z) < +\infty \Rightarrow d_f(x, z) \leqslant d_f(x, y) + d_f(y, z) \quad (1.12)$$

which shows that d_f is a generalized quasi-metric on X_+^0. Finally, suppose f is a completely admissible function, and let $x, y \in X_+^0$ satisfying $d_f(x, y)=0$. From the definition (vi) we infer $f(M(x, y),\ M(y, x))=1$ and so, taking into account the supplementary property (c') $M(x, y) \leqslant 1$, $M(y, x) \leqslant 1$. In this case, we have simultaneously

$$x \leqslant M(x, y)\, y \leqslant y,\ y \leqslant M(y, x)\, x \leqslant x$$

and therefore, necessarily, $x=y$. In other words,

$$d_f(x, y)=0 \Rightarrow x=y \quad (1.13)$$

and this shows that d_f is a generalized metric on X_+^0, which was to be proved.

Suppose the function f is expressed by (1.8). Then, from the above result, the corresponding mapping d_f contructed by (vi) is a generalized quasi-metric on X_+^0. It is not hard to see that this mapping satisfies also the folowing supplementary properties

$$d_f(\alpha x, \beta y)=d_f(x, y), \text{ for every } x, y \in X_+^0,\ \alpha, \beta > 0 \quad (1.14)$$

$$d_f(x, y)=0 \Rightarrow \text{there is a unique } \lambda > 0 \text{ with } x=\lambda y \quad (1.15)$$

Indeed, (1.14) follows immediately from (1.6). On the other hand, let $x, y \in X_+$ be such that $d_f(x, y)=0$. From the definition (vi), $M(x, y)\, M(y, x)=1$ and so, $M(x, y)\, y \leqslant M(x, y)\, M(y, x)\, x=x$; this fact, combined with (1.3) yields $x=M(x, y)\, y$, i.e., (1.15) holds. From this reason, the mapping d_f may be considered as being a „projective" metric on X_+^0; of course, this mapping is nothing else than the socalled Hilbert's projective metric [1], [2].

Now, suppose the function f is given by (1.9). Again from the above result, the corresponding mapping d_f, constructed by (vi) is a generalized metric on X_+^0; by convention, this mapping will be called, throughout this note, the generalized projective matric of X_+^0.

It is important to observe that Hilbert's projective metric seems to be very useful in the treatement of many linear problems [1], [2], [3], but somewhat difficult to be applied in the study of some nonlinear problems [4], [5]. On the contrary, the generalized projective metric defined above seems to be useful in the treatement of some nonlinear problems, as we shall see in the next sections.

2. Main results

In what follows we suppose that the linear real space X and the cone X_+ (satisfying (i)—(iii) of the preceding section) are such that X is a vector lattice [1], i.e.,

(i) for every $x, y \in X$ there exist $\sup(x, y)$, $\inf(x, y)$

Now, let us define the „modulus" $|\cdot| : X \to X_+$ by

(ii) $|x| = \sup(x, -x)$, for every $x \in X$

Lemma 2.1. The function $|\cdot|$ defined by (ii) has the properties

$$|x| = 0 \text{ if and only if } x = 0 \tag{2.1}$$

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|, \text{ for every } x, y \in X \tag{2.2}$$

$$|\alpha x| = |\alpha| \cdot |x|, \text{ for every } x \in X, \alpha \in R \tag{2.3}$$

Proof. The relations (2.1) and (2.3) are almost evident. Now, let $x, y \in X$. From the definition (ii), $x+y \leqslant |x|+|y|$, $-x-y \leqslant |x|+|y|$ and this gives (2.2).

Let $g \in X_+^0$ be a given element. Define a mapping $\|\cdot\|_g : X \to \bar{R}_+$ by

(iii) $\|x\|_g = M(|x|, g)$, for every $x \in X$

From the above lemma, combined with lemma 1.1, $\|\cdot\|_g$ is a generalized norm on X (called the intrinsic generalized norm of X) that is, $(X, \|\cdot\|_g)$ is a generalized normed space (or, equivalently, a generalized metric space by the standard construction of its metric).

Now, let the mappings $P : X \overset{2}{\to} \bar{R}_+$ and $d : (X_+^0)^2 \to \bar{R}_+$ be defined by

(iv) $P(x, y) = \max(M(x, y), M(y, x))$, for every $x, y \in X_+$

(v) $d(x, y) = \log P(x, y)$, for every $x, y \in X_+^0$

Of course, the mapping d is nothing else than the generalized projective metric of X. An important question concerning the mapping d is the following: under what conditions is the generalized metric space (X_+^0, d) a complete generalized metric space! It is the objective of this section to given an efficient answer to this question.

Firstly, for every $x, y \in X$, $x \leqslant y$, let us denote

(vi) $[x, y] = \{z \in X ; x \leqslant z \leqslant y\}$

and for every $g \in X_+^0$ let us put

(vii) $X_+^0(g) = \{x \in X_+^0 ; d(x, g) < +\infty\}$

It is important to observe that $x \in X_+^0(g)$ if and only if $x \in [\alpha g, \beta g]$ for some $\alpha, \beta > 0$, $\alpha < \beta$.

Lemma 2.2. Let $g \in X_+^0$, $\alpha, \beta > 0$, $\alpha < \beta$. Then

$$\alpha d(x, y) \leqslant \|x-y\|_g \leqslant \beta(\exp(d(x, y))-1) \tag{2.4}$$

for every $x, y \in [\alpha g, \beta g]$.

Proof. Let $x, y \in [\alpha g, \beta g]$. As $x \leqslant P(x, y)\, y$, $y \leqslant P(x, y)\, x$, we derive $x-y \leqslant (P(x, y)-1)\, y \leqslant \gamma(P(x, y)-1)\, g$, and analogously $y-x \leqslant (P(x, y)-1)\, x \leqslant \beta(P(x, y)-1)\, g$. This gives $|x-y| \leqslant \beta(P(x, y)-1)\, g = \beta(\exp \cdot (d(x, y))-1)\, g$ and so, the second part of (2.4) is established. To prove the first part, let us observe that $x-y \leqslant |x-y| \leqslant \|x-y\|_g g$, $y-x \leqslant |x-y| \leqslant \|x-y\|_g g$ and this gives $x \leqslant y + \|x-y\|_g g \leqslant (1+(1/\alpha)\|x-y\|_g)\, y$ and analogously $y \leqslant x + \|x-y\|_g g \leqslant (1+(1/\alpha)\|x-y\|_g)\, x$. This implies $P(x, y) \leqslant 1 + (1/\alpha)\|x-y\|_g$ and consequently,

$$d(x, y) \leqslant \exp(d(x, y))-1 = P(x, y)-1 \leqslant (1/\alpha)\|x-y\|_g$$

which was to be proved.

An important topological property of the cone X_+ is given by :

Theorem 2.1. The cone X_+ is a $\|\cdot\|_g$ – closed cone, for every $g \in X_+^0$.

Proof. Of course, the conclusion of our theorem is equivalent to the fact that $X \setminus X_+$ is an open set. Let $x \in X \setminus X_+$ be a fixed element. Suppose for every $\varepsilon > 0$ there is a $y = y(\varepsilon) \in X_+$ with $\|x-y\|_g < \varepsilon$; taking into account the definition (iii) of $\|\cdot\|_g$ we get $x+\varepsilon g \geqslant x-y+\varepsilon g \geqslant 0$. So, $x+\varepsilon g \geqslant 0$, for every $\varepsilon > 0$. As X_+ is an archimedean cone, this would imply $x \geqslant 0$, a contradiction. Therefore, there must be an $\varepsilon > 0$ such that $y \in X$, $\|x-y\|_g < \varepsilon \Rightarrow y \in X \setminus X_+$ which shows that $X \setminus X_+$ is open, completing the proof. Q.E.D.

The main result of this section is the following.

Theorem 2.2. Suppose $(X, \|\cdot\|_g)$ is a complete generalized metric space, for every $g \in X_+^0$. Then, necessarily, (X_+^0, d) is a complete generalized metric space.

Proof. Let $\{x_n ; n \in N\} \subset X_+^0$ be a d-Cauchy sequence. Without loss of generality we may suppose $d(x_0, x_n) < \log \alpha < +\infty$, $n \in N$ (for some $\alpha > 1$). Denote $x_0 = g$. Clearly,

$$d(g, x_n) < \log \alpha \ (\forall n \in N) \Rightarrow P(g, x_n) < \alpha \ (\forall n \in N), P(x_n, g) < \alpha \ (\forall n \in N)$$

From this fact, $\{x_n ; n \in N\} \subset [(1/\alpha) g, \alpha g] \subset X_+^0$ and so, taking into account the second part of (2.4), $\{x_n ; n \in N\}$ is a $\|\cdot\|_g$-Cauchy sequence. As $(X, \|\cdot\|_g)$ is complete, $\|x_n - x\|_g \to 0$ as $n \to \infty$ for some $x \in X$. Since, from theorem 2.1, the interval $[(1/\alpha) g, \alpha g]$ is $\|\cdot\|_g$-closed, we must have $x \in [(1/\alpha) g, \alpha g]$. But then, from the first part of (2.4), $d(x_n, x) \to 0$ as $n \to \infty$, and this completes the proof of our theorem. Q.E.D.

As an important example, suppose the linear space X is a locally convex linear topological space under the directed and sufficient family of seminorms S and let us suppose in addition that (a) X is S-sequentially complete (i.e., every S-Cauchy sequence is convergent), (b) the cone X_+ is S-closed, (c) $x, y \in X_+$, $x \leqslant y$, $p \in S \Rightarrow p(x) \leqslant p(y)$, (d) $p(|x|) = p(x)$, for every $p \in S$, $x \in X$. Then, necessarily, X is $\|\cdot\|_g$-complete, for every $g \in X_+^0$ (and therefore, from theorem 2.2, (X_+^0, d) is a complete generalized metric space). Indeed, let $g \in X_+^0$ be a fixed element and suppose $\{x_n ; n \in N\} \subset X$ is a $\|\cdot\|_g$-Cauchy sequence in X. Let $\varepsilon > 0$. There is a $m = m(\varepsilon) \in N$ such that $i, j \geqslant m \Rightarrow \|x_i - x_j\|_g < \varepsilon/2$. Now, from the implication

$$\|x_i - x_j\|_g < \varepsilon/2 \Rightarrow |x_i - x_j| \leqslant (\varepsilon/2) g$$

together with (c)+(d) stated above, we derive $p(x_i - x_j) = p(|x_i - x_j|) \leqslant p((\varepsilon/2) g) = (\varepsilon/2) p(g)$, for every $p \in S$. This shows that $\{x_n ; n \in N\}$ is a S-Cauchy sequence and therefore (from (a)) $x_n \xrightarrow{s} x$ as $n \to \infty$, for some $x \in X$. Finally, from the implication

$$|x_i - x_j| \leqslant (\varepsilon/2) g \Rightarrow x_j - (\varepsilon/2) g \leqslant x_i \leqslant x_j + (\varepsilon/2) g$$

we get (letting i tends to infinity and taking into account (b)) $x_j - (\varepsilon/2) g \leqslant x \leqslant x_j + (\varepsilon/2) g$, and this implies $|x - x_j| \leqslant (\varepsilon/2) g$, i.e., $\|x - x_j\|_g \leqslant \varepsilon/2 < \varepsilon$, for every $j \geqslant m$. This proves that $\|x - x_n\|_g \to 0$ as $n \to \infty$ and therefore, X is $\|\cdot\|_g$-complete, as claimed.

3. Quasi-homogeneons mappings

Throughout this section, X, X_+, d defined above are such that (X_+^0, d) is a complete generalized metric space.

A mapping $T : X_+^0 \to X_+^0$ is said to be monotone iff $x \leqslant y \Rightarrow Tx \leqslant Ty$. Also, a mapping $T : X_+^0 \to X_+^0$ is called (a) quasi-homogeneous of degree k

(with $k > 0$) iff $T(\lambda x) \leqslant \lambda Tx$, for every $\lambda > 1$, $x \in X_+^0$, (b) homogeneous of degree k iff $T(\lambda x) = \lambda Tx$, for every $\lambda > 0$, $x \in X_+^0$. Clearly, every homogeneous mapping (of a degree k) is also a quasi-homogeneous mapping (of the same degree k) but the converse is not in general true.

The main result concerning this class of mappings may be stated as follows.

Theorem 3.1. Under the general hypotheses of this section let the mapping $T : X_+^0 \to X_+^0$ be such that

(i) T is monotone

(ii) ZT is quasi-homogeneous of degree $k \in]0, 1[$

(iii) the set Y of all $g \in X_+^0$ such that $\alpha g \leqslant Tg \leqslant \beta g$, for some $\alpha, \beta > 0$, $\alpha < \beta$, is not empty

Then, there exists a map $S : Y \to X_+^0$ such that (for every $g \in Y$) (a) $Sg \in X_+^0(g)$ is the unique solution of the equation $x = Tx$ in $X_+^0(g)$, (b) the sequence of successive approximations $\{T^m g ; m \in N\} \subset X_+^0(g)$ converges to Sg in the sense that $d(T^m g, Sg) \leqslant k^m d(g, Tg)$, $\forall m \in N$.

Proof. Let $x, y \in X_+^0$ be such that $t = d(x, y) < +\infty$. From the definition of the mapping d, $x \leqslant e^t y$, $y \leqslant e^t x$ and so, from (i)+(ii), $Tx \leqslant e^{kt} Ty$, $Ty \leqslant e^{kt} Tx$ and this gives $d(Tx, Ty) \leqslant kt = kd(x, y)$. On the other hand, (iii) says that every $g \in Y$ is such that $d(g, Tg) < +\infty$. Therefore, the extended Banach's fixed point theorem [6] applies, and this completes the proof. Q.E.D.

As an important consequence we have the following.

Corollary 3.1. Let $\{T_i ; i = 1, \ldots, n\}$ be a family of mappings from X_+^0 to itself and let $f \in X_+^0$ be such that

(iv) every T_i is monotone and homogeneous of degree $k_i \in]0, 1[$

(v) the set Y of all $g \in X_+^0$ such that $\alpha g \leqslant f \leqslant \beta g$ (for some $\alpha, \beta > 0$, $\alpha < \beta$) and $\alpha_i g < T_i g \leqslant \beta_i g$ (for some α_i, $\beta_i > 0$, $\alpha_i < \beta_i$), for every $i \in \{1, \ldots, n\}$, is not empty.

Then, there exists a map $S : Y \to X_+^0$ such that (for every $g \in Y$) (a) $Sg \in X_+^0(g)$ is the unique solution of the equation $x = T_1 x + \ldots + T_n x$ in $X_+^0(g)$, (b) the sequence of succesive approximations $\{g_m ; m \in N\} \subset X_+^0(g)$, $g_0 = g$, $g_{m+1} = f + T_1 g_m + \ldots + T_n g_m$ $(\forall m \in N)$ converges to Sg in the sense that $d(g_m, g) \leqslant k^m d(g_0, g_1)$, for every $m \in N$ (where we have denoted $k = \max(k_1, \ldots, k_n)$).

Proof. Let the mapping $U : X_+^0 \to X_+^0$ defined by

$$Ux = f + T_1 x + \ldots + T_n x, \text{ for every } x \in X_+^0 \tag{3.1}$$

Firstly, it is clear that U is monotone. Furthermore, let $x \in X_+^0$, $\lambda > 1$. We hve $U(\lambda x) = f + T_1(\lambda x) + \ldots + T_n(\lambda x) = f + \lambda^{k_1} T_1 x + \ldots + \lambda^{k_n} T_n x \leqslant \lambda^k (f + T_1 x + \ldots + T_n x) = \lambda^k Ux$, and this shows that U is quasi-homogeneous of degree $k \in]0, 1[$. Finally, (v) says that for every $g \in Y$, $\bar{\alpha} g \leqslant Ug \leqslant \bar{\beta} g$, for some $\bar{\alpha}, \bar{\beta} > 0$, $\bar{\alpha} < \bar{\beta}$. Thus, theorem 3.1 applies. Q.E.D.

It should be noted that the above corollary represents an improvement of the main results of [5] on one hand and an extension of a results of [4], on tahe other hand. In the same time, the generalized projective metric method used here seems to be more directly than the Hilbert's projective metric method used in the above quoted results.

4. An aplication

Let $n \in N' = \{1, 2, \ldots\}$ be a given positive integer and let $(R^n, \|\cdot\|)$ be the euclidean n-dimensional space, endowed with a given norm $\|\cdot\|$. Let X denotes the linear space of all continuous $x : R_+ \to R^n$, and denote also by

X_+ the set of all continuous $x: R_+ \to R_+^n$. For every $i \in N'$, let $p_i: X \to R_+$ be a seminorm on X defined by

(i) $p_i(x) = \sup \{\| x(t) \|; t \in [0, i]\}$, for every $x \in X$

It is simply to verify that X is a locally convex linear topological space under the directed and sufficient family of seminorms $S = \{p_i; i \in N'\}$, and that X_+ is a nonempty, convex, pointed and archimedean cone in X; on the other hand, clearly, X is a vector lattice under the ordering $\leqslant$ generated by the cone X_+ and, moreover, all conditions (a)—(b) stated at the end of section 2 are satisfied. Therefore, X is a complete generalized metric space under $\| \cdot \|_g$, for every $g \in X_+^0$, and so, by theorem 2.2. X_+^0 is a complete generalized metric space under the corresponding generalized projective metric d, introduced in section 1.

For every $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R_+^n$, $k = (k_1, \ldots, k_n) \in (R_+^0)^n$, denote

(ii) $x^k = (x_1^{k_1}, \ldots, x_n^{k_n})$

Now, let $A = \| a_{ij} \|_{n \times n}$ $(a_{ij} \in R, \forall i, j \in \{1, \ldots, n\})$ be a $n \times n$ real matrix, $B = \| b_{ij} \|_{n \times n}$ $(b_{ij} \in X_+, \forall i, j \in \{1, \ldots, n\})$ a positive $n \times n$ function matrix, $x^\circ \in R_+^n$, $x^\circ \neq 0$, $k = (k_1, \ldots, k_n) \in (R_+^0)^n$, and let us consider the Cauchy problem

$$x(t) = Ax(t) + B(t)\, x^k(t), \ \forall t \in R_+; \ x(0) = x^\circ \qquad \text{(C.P.)}$$

The main result concerning this Cauchy problem may ba stated as follows.

Theorem 4.1. Suppose there exist a positive $n \times n$ real matrix $C = \| c_{ij} \|_{n \times n}$ $(c_{ij} \in R_+, \forall i, j \in \{1, \ldots, n\})$ and a $g \in X_+^0$, such that

$$a_{ij} \geqslant 0, \ \forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, \ i \neq j \qquad (4.1)$$

$$k_i \in]0, 1[, \ \forall i \in \{1, \ldots, n\} \qquad (4.2)$$

$$\alpha C \leqslant B(t) \leqslant \beta C, \ \forall t \in R_+, \text{ for some } \alpha, \beta > 0, \ \alpha < \beta \qquad (4.3)$$

$$g'(t) = Ag(t) + C\, g^k(t), \ \forall t \in R_+; \ g(0) = x^\circ \qquad (4.4)$$

Then, the Cauchy problem (CP) has a unique solution $z \in X_+^0$, satisfying $\bar{\alpha} g \leqslant z \leqslant \bar{\beta} g$, for some $\bar{\alpha}, \bar{\beta} > 0$, $\bar{\alpha} < \bar{\beta}$.

Proof. Form the variation of constans formula, the Cauchy problem (CP) is equivalent with

$$x(t) = e^{At} x^\circ + \int_0^t e^{A(t-s)} B(s)\, x^k(s)\, ds, \ \forall t \in R_+ \qquad \text{(C.P.)}'$$

and, on the other hand, (4.4) is equivalent with

$$g(t) = e^{At} x^\circ + \int_0^t e^{A(t-s)}\, Cg^k(s)\, ds, \ \forall t \in R_+ \qquad (4.4)'$$

Firstly, let us observe that, by (4.1), the exponential matrix e^{At} is a positive function matrix (see, e.g., [7]), and so, we may define a mapping $T: X_+^0 \to X_+^0$ by the second member of (CP)'. It is almost evident that the mapping T is monotone and quasi-homogeneous of degree $h = \max(k_1, \ldots, k_n)$. On the other hand, clearly, (4.3) is equivalent with

$$\alpha C \leqslant B(t) \leqslant \beta C, \ \forall t \in R_+, \text{ for some } \alpha, \beta > 0, \ \alpha < 1 < \beta \qquad (4.3)'$$

In this case, (4.3)′ + (4.4)′ imply

$$Tg(t)=e^{At}x^{\circ}+\int_0^t e^{A(t-s)}B(s)\,g^k(s)\,ds \leqslant \beta\,(e^{At}x^{\circ}+$$

$$+\int_0^t e^{A(t-s)}\,Cg^k(s)\,ds)=\beta g(t),\ \forall\, t\in R_+,\ \text{and analogously,}$$

$$Tg(t)=e^{At}x^{\circ}+\int_0^t e^{A(t-s)}\,B(s)\,g^k(s)\,ds \geqslant \alpha\,(e^{At}x^{\circ}+$$

$$+\int_0^t e^{A(t-s)}\,Cg^k(s)\,ds)=\alpha g(t),\ \forall\, t\in R_+$$

which shows that $\alpha g \leqslant Tg \leqslant \beta g$. Consequently, all conditions of theorem 3.1 hold and this completes the proof. Q.E.D.

It is interesting to remark that the Cauchy problem (CP) presented above represents an usefiul mathematical model for some growth processes [8, ch. 7].

REFERENCES

1. Birkhoff G., Extensions of Jentzsch's theorem, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 85, 219—227 (1957).
2. Bushell P. J., Hilbert's metric positive contraction mappings in a Banach space, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 52, 330—338 (1973).
3. Bauer F. L., An elementary proof of the Hopf inequality for positive operators, *Numer Math.*, 7, 331—337 (1965).
4. Bushell P. J., On a class of Volterra and Fredholm non-linear integral equations, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 79, 329—335 (1976).
5. Turinici M., Fixed points for a sum of projective contractions, *An. St. Univ. „Al.. I. Cuza"* Iași, s. I-a, to appeat.
6. Luxemburg J. S. W., On the convergence of succesive approximations in the theory of ordinary differential equations, *Indag. Math.*, 20, 540—546 (1958).
7. Pavel N. Turinici M., Positive solutions of a system of ordinary differential equations, *An. St. Univ. „Al. I. Cuza" Iași, s. I-a*, 24, 63—70 (1978).
8. Bertalanffy L. von. Theorie générale des systèmes. Dunod, Paris (1973).

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara

Tom 26 (40) **Fascicola 1—1981**

SERIA MATEMATICĂ-FIZICĂ

IDEALE DE ALGEBRE UNIVERSALE

DE

CARMENCITA UROŞU

Primită la redacţie 19 I 1980

Ca o generalizare a noţiunii de ideal din unele clase particulare de algebre, se introduce noţiunea de ideal de algebră al unei algebre universale $U=<A, F>$. Fie $F' \subseteq F$, astfel încît $\forall f_\gamma \in F'$, $n_\gamma \neq 0$.

Definiţia 1. O subalgebră I a algebrei U se numeşte F-ideal, dacă $\forall f_\gamma \in F$ şi elementele $a_i \in A$, $i=\overline{1,n}$ astfel încît $I \cap \{a_i\}_{i=\overline{1,n_\gamma}} \neq \emptyset$ rezultă că elementul $f_\gamma(a_1, \ldots, a_{n_\gamma}) \in I$.

Vom nota cu $\mathcal{J}_{F'}(U)$ mulţimea tuturor idealelor algebrei universale U, pentru un F' fixat.

Propoziţia 1. $\mathcal{J}_{F'}(U)$ este o latice algebrică.

Demonstraţie. Mulţimea $\mathcal{J}_{F'}(U)$ nu este vidă deoarece $U \in \mathcal{J}_{F'}(U)$. $\mathcal{J}_{F'}(U)$ este închisă relativ la intersecţii arbitrare.

Fie $\{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq \mathcal{J}_{F'}(U)$ şi notăm $I=\bigcap_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$. Evident $I \in S(U)$, $S(U)$ fiind sistemul de închidere pe A determinat de mulţimea subalgebrelor algebrei U.

Pentru orice $f_\gamma \in F'$ şi orice elemente $\{a_i\}_{i=\overline{1,n_\gamma}} \subseteq A$ astfel încît $I \cap \{a_i\}_{i=\overline{1,n_\gamma}} \neq \emptyset$ rezultă că pentru $\forall \lambda \in \Lambda$ avem relaţia : $I_\lambda \cap \{a_i\}_{i=\overline{1,n_\gamma}} \neq \emptyset$. Deoarece I_λ sînt F'—ideale, are loc relaţia $f_\gamma(a_1, \ldots, a_{n_\gamma}) \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$, $f_\gamma \in F'$. Deci $f_\gamma(s_1, \ldots, a_{n_\gamma}) \in I$ şi rezultă că $I=\bigcap_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda \in \mathcal{J}_{F'}(U)$. Astfel $\mathcal{J}_{F'}(U)$ este un sistem de închidere pe U. Operatorul de închidere corespunzător acestui sistem de închidere îl notăm cu $\Omega_{F'}$:

$$\forall M \subseteq A,\ \Omega_{F'}(M)=\bigcap\{I_\alpha / I_\alpha \in \mathcal{J}_{F'}(U) \text{ şi } M \subseteq I_\alpha\}$$

Vom arăta că laticea completă $\mathcal{J}_{F'}(U)$ este o latice algebrică. Considerăm o familie dirijată la dreapta de F'-ideale : $\{I_\lambda / \lambda \in \Lambda\}$. Fie $I=\bigcap(I_\lambda / \lambda \in \Lambda)$. Evident $I \in \mathcal{J}(U)$ şi $\forall f_\gamma \in F'$ şi elementele $\{a_i\}_{i=\overline{1,n_\gamma}} \subseteq A$ astfel încît $I \cap \{a_i\}_{i=\overline{1,n_\gamma}} \neq \emptyset$, rezultă că există I_λ şi $f_\lambda(a_1, \ldots, a_{n_\gamma}) \in I_\lambda$. Deci elementul $f_\gamma(a_1, \ldots, a_{n_\gamma}) \in I$. Astfel $I \in \mathcal{J}_{F'}(U)$ şi laticea $\mathcal{J}_{F'}(U)$ este algebrică.

Propoziţia 2 $\mathcal{J}_{F'}(U)$ nu este o sublatice completă a laticei $\mathcal{J}(U)$.

Demonstraţie. Dacă I_λ, $\lambda \in \Lambda$, sînt ideale din $\mathcal{J}_{F'}(U)$, rezultă că $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} I_\gamma \in \mathcal{J}_{F'}(U)$ şi deci : $inf._{\mathcal{J}(U)}\{I_\lambda\}=inf._{\mathcal{J}_{F'}(U)}\{I_\lambda\}$. Dacă considerăm sup. $\{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ în laticea $\mathcal{J}(U)$ avem :

$$\{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}=\bigcap\{S \in \mathcal{J}(U) / \bigcap_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda \subseteq S\}.$$

Dacă $f_\gamma \in F'$, $\{a_i\}_{i=\overline{1,n_\gamma}} \subset A$ și $I \cap \{a_i\}_{i=\overline{1,n_\gamma}} \neq \varnothing$ rezultă relația :

$$\{S \in S(U) / \bigcup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda \subseteq S\} \cap \{a_i\}_{i=\overline{1,n_\gamma}} \neq \varnothing.$$

Deci $\forall\, S \in S(U)$ și $\bigcup_{\gamma \in \Lambda} I_\lambda \subseteq S$ avem $S \cap \{a_i\}_{i=\overline{1,n_\gamma}} \neq \varnothing$ dar nu rezultă că cel puțin un element $a_i \in I_\gamma$ pentru un oarecare $\lambda \in \Lambda$ și deci I nu va fi totdeauna un F'-ideal de algebră.

Vom nota cu $T_{F'}(U) \subseteq T(U)$, translațiile ce se obțin cu ajutorul operațiilor $f_\gamma \in F'$.

Propoziția 3 Condiția necesară și suficientă ca $I \in \mathcal{L}(U)$ să fie un F'-ideal de algebră, este ca I să fie invariantă relativ la toate translațiile $t \in T_{F'}(U)$.

Demonstrație. Dacă $I \in \mathcal{J}_{F'}(U)$ rezultă că pentru orice t din $T_{F'}(U)$ avem $I^t \subseteq I$, deoarece $f_\gamma(a_1, \ldots, a_{n\gamma})$ aparține lui I dacă cel puțin un $a_i \in I$, $\forall f_\gamma \in F'$.

Reciproc, dacă subalgebra I este închisă relativ la toate F'-translațiile adică $I^t \leqslant I$, $\forall t \in T_{F'}(U)$, rezultă că $f_\gamma(a_1, \ldots, a_{n_\gamma}) \in I$, $(f_\gamma \in F')$ cînd cel puțin un element $a_i \in I$. Deci I este un F'-ideal.

Propoziția 4

Pentru orice F-ideal de algebră I, există o congruență minimală $\theta \in \mathcal{C}(U)$ astfel încît $I \in U/\theta$. Congruența θ este $I^2 \cap \Delta(U-I)^2$.

Demonstrație.

Vom defini congruența ρ pe algebra U astfel [4] :

$a = b\ (\rho) \Leftrightarrow$ există șirul finit $a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b$ astfel încît $x_{i-1}, x_i \in I$, $i = \overline{I, n}$, pentru o oarecare translație $t \in T(U)$ sau $x_{i-1} = x_i$. Conform [4] relația ρ este o congruență astfel încît I este inclus într-o clasă de congruență.

Pentru congruența : $\rho^* = \{(x, y) \in A^2 / x^t \in I \Leftrightarrow y^t \in I\}$ idealul I este reuniune de ρ^* clase, adică este ρ^*-convex.

I fiind închis relativ la orice translație $t \in T(U)$, rezultă că $x \equiv y\ (\rho^*)$ implică $x \equiv y\ (\rho)$ și deci $\rho^* \subset \rho$. Rezultă că F-idealul I este o clasă de congruență pe U, congruența minimă cu această proprietate fiind :

$$\theta = I^2 \cap \Delta(U-I)^2$$

Definiția 2 Idealul $I \in \mathcal{J}_F(U)$ se numește ideal prim al algebrei U dacă $\forall f_\gamma \in F'$ și oricare ar fi elementele $a_i \in A$, $i = \overline{I, n_\gamma}$, condiția $f_\gamma(a_1, \ldots, a_{n_\gamma}) \in I$ implică că cel puțin un element $a_i \in I$./

Vom nota mulțimea F'-idealelor prime cu $\mathcal{P}_{F'}(U)$. Evident :

$\mathcal{P}_{F'}(U) \subseteq \mathcal{J}_{F'}(U)$ dar $\mathcal{P}_{F'}(U)$ nu este o sublatice a laticei idealelor deoarece nu este închisă relativ la intersecție. Dacă $\{I_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ este o familie de F'-ideale prime și $f_\gamma(a_1, \ldots, a_{n_\gamma}) \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ rezultă că pentru fiecare $\lambda \in \Lambda$ există cel puțin un $a \in I$ dar nu rezultă existența unui element a_i din $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ și deci în general $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ nu aparține mulțimii $\mathcal{P}_{F'}(U)$.

Dacă F nu conține operații nulare (latici, semigrupuri, etc.), are loc următoarea proprietate :

Propoziția 5

Complementara unui F-ideal prim de algebră este o subalgebră a algebrei U.

Demonstrație.

Fie $I \in \mathcal{P}_F(U)$ și $S = U - I$. Considerăm operația $f_\gamma \in F$ și elementele $a_i \in S$, $i = \overline{1, n_\gamma}$. Rezultă că $f_\gamma(a_1, \ldots, a_{n_\gamma}) \in S$, deoarece dacă acest element ar aparține idealului prim I ar rezulta că cel puțin un $a_i \in I$. Deci S este o subalgebră.

BIBLIOGRAFIE

[1] G. Grätzer, General lattice theory, Akademie — Verlag, Verlin, 1978.

[2] A. H. Clifford, G. B. Preston: The algebraic theory of semigroups, vol. I și II, American Mathematical Society, Providence, 1964.

[3] Gr. C. Moisil, Introducere în algebră. Inele și ideale, vol. I, Editura Academiei, București, 1954.

[4] C. Uroșu, Translații pe Ω-algebre, (va apare), Buletinul științific și tehnic al I.P.T.V.T

IDEALS DES ALGEBRES UNIVERSAILES

(RÉSUMÉ)

Dans le travail on donne la notion d'ideal d'une algèbre universalle par analogie avec la notion d'ideal prim en classes d'algebres connues : semigroups, lattices, anneaux. On donne une caracterizatione des ideals avec les translations sur l'algebre $U = <A, F>$.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara

Tom 26 (40) **Fascicola 1—1981**

SERIA MATEMATICĂ-FIZICĂ

W-SUBALGEBRE ALE ALGEBRELOR UNIVERSALE

DE

CARMENCITA UROŞU

Primită la redacţie 19 I 1980

I. În lucrare se consideră algebre universale dintr-o varietate algebrică $\mathcal{V}$ de tipul τ, cu domeniul operaţiilor fundamentale $F=(f_\gamma/\gamma \in \Gamma)$ astfel încît $\tau(f_\gamma) \neq 0$. Prin $\mathcal{B}_n^\tau$ notăm algebra simbolurilor polinomiale n-are de tipul τ, $n \in N$. Laticea subalgebrelor unei algebre $U=<A, F>$ o vom nota cu $\mathcal{J}(U)$.

În [2], Thomas Wolfe a introdus o subalgebră particulară a unei algebre universale :

Definiţia 1. Se numeşte subalgebră Thomas Wolfe a unei algebre universale U, o subalgebră $B \in S(U)$ cu proprietatea că $\forall \gamma \in \Gamma$ şi $a=(ak)_{k=\overline{1,n_\gamma}}$, $f_\gamma(a) \in B$ implică $a_k \in B$ pentru orice $K=\overline{1, n_\gamma}$. Vom nota mulţimea subalgebrelor Thomas Wolfe ale algebrei U cu $S_w(U)$. Această mulţime nu este vidă deoarece $U \in S_w(U)$. Un element $B \in S_w(U)$ îl vom numi W-subalgebră a algebrei U.

În [5] se defineşte noţiunea de ideal de algebră universală. În cazul cînd F nu conţine operaţii nulare are loc definiţia :

Definiţia 2. O mulţime $I \subseteq U$ se numeşte ideal de algebră al algebrei universale U, dacă pentru $\forall f_\gamma \in F$ şi $\forall\, a_i \in A$, $i=\overline{1, n_\gamma}$, elementul $f_\gamma(a_1, \ldots, a_{n_\gamma}) \in I$ d. şi n.d. cel puţin unul din elementele a_i aparţine mulţimii I.

2. O legătură între W-subalgebrele şi idealele de algebră ale unei algebre $U=<A, F>$ este dată de următoarea propoziţie :

Propoziţia 1. Pentru o subalgebră $V \in \mathcal{J}(U)$, următoarele condiţii sînt echivalente :

(1) V este o W-subalgebră

(2) $U-V$ este un ideal de algebră în U.

Demonstraţie. Fie $V \in S_w(U)$. Dacă $U-V \neq \emptyset$, fie $a_i \in U$, $i=\overline{1, n_\gamma}$ şi cel puţin un element $a_i \in U-V$. pentru o operaţie arbitrară $f_\gamma \in F$, din definiţia W-algebrei V rezultă că $f_\gamma(a_1, \ldots, a_{n_\gamma}) \in U-V$ şi deci $U-v$ este un ideal de algebră.

Reciproc, dacă $U-V$ este un ideal de algebră în U şi $f_\gamma(a_1, \ldots, a_{n_\gamma})$ este un element din idealul $U-V$, rezultă că cel puţin un $a_i \in U-V$ şi deci $f_\gamma(a_1, \ldots, a_{n_\gamma}) \in V$ implică faptul că fiecare a_i, $i=\overline{1, n_\gamma}$ aparţin subalgebrei V. Deci $V \in S_W(U)$.

Observaţie. Relaţia de echivalenţă corespunzătoare partiţiei $\{V, U-V\}$ este o relaţie de congruenţă.

Definim un operator J_W pe U astfel încît oricărei mulţimi $M \in \mathcal{P}(U)$ îi pune în corespondenţă o W-subalgebră a algebrei U :

$$J_W(M)=\bigcap\{S_i/S_i \in S_W(U) \text{ şi } M \subseteq S_i\}.$$

Evident că $S_W(U) \subseteq \mathcal{P}(U)$ și este închisă relativ la intersecții arbitrare. Deci $S_W(U)$ este un sistem de închidere iar J_W este un operator de închidere.

Propoziția 2. $S_W(U)$ este o latice algebrică.

Demonstrație. Vom arăta că $S_W(U)$ este un sistem de închidere algebric pe U și deci $S_W(U)$ este o latice algebrică. Evident $S_W(U)$ este o latice completă și considerăm o familie dirijată la dreapta de W-subalgebre : $\{S \mid \lambda \in \Lambda\}$. Vom arăta că $\bigcup\{S \mid \lambda \in \Lambda\}$ este tot o W-subalgebră.

Fie $f_\gamma(a_1, \ldots, a_{n_\gamma}) \in \bigcup\{S_\lambda / \lambda \in \Lambda\}$, deci $f_\gamma(a_1, \ldots, a_{n_\gamma}) \in S_\lambda$ pentru un oarecare $\lambda \in \Lambda$. Rezultă că fiecare a_i, $i=\overline{1, n_\gamma}$, este element din W-subalgebra S_λ și deci $a_i \in \bigcup\{S_\lambda / \lambda \in \Lambda\}$.

Notăm mulțimea elementelor compacte ale laticei algebrice $S_W(U)$ cu $S_W^*(U)$.

Propoziția 3. $S_W^*(U)$ se compune din Φ și W-subalgebrele principale.

Demonstrație. Se știe că pentru un operator algebric are loc relația :

$$J_W(M) = \bigcup\{J(M_f) / M_f \in \mathcal{P}_f(M)\}$$

unde $\mathcal{P}_f(M)$ este mulțimea părților finite ale lui M.

O W-subalgebră S a algebrei U este element compact în laticea $S_W(U)$ dacă $S \subseteq \bigvee_{i \in I} S_i$ implică existența unei mulțimi finite $I' \in \mathcal{P}_f(I)$ astfel ca $S \subseteq \bigwedge_{i \in I} S_i$. Deci orice W-subalgebră compactă este finit generată.

Pentru a demonstra proprietatea enunțată, vom arăta că fiecare W-subalgebră finit generată este o W-subalgebră principală a algebrei U. Fie $p \in \mathcal{B}_n^\tau$ și dacă $F = J_W(\{a_1, \ldots, a_n\})$ este un element compact al laticei $S_W(U)$, atunci pentru orice $p \in \mathcal{B}_n^\tau$ rezultă că elementul $b = p(a_1, \ldots, a_n)$ aparține subalgebrei F. Deci $J_W(b) \subseteq F$. Reciproc, dacă $b = p(a_1, \ldots, a_n)$ aparține unei W-subalgebre F, rezultă că toate elementele a_i, $i=\overline{1, n}$, aparțin lui F. Deci și $J_W(\{a_1, \ldots, a_n\})$ este inclusă în $J_W(b)$. Rezultă că fiecare W-subalgebră compactă nevidă corespunde cu o W-subalgebră principală.

Vom nota cu $I(a)$ idealul de algebră generat de elementul $a \in A$ și cu $J_F(\{a\})$ subalgebra algebrei U generată de elementul a, J_F fiind operatorul corespunzător sistemului de închidere $S(U)$.

Propoziția 4. W-subalgebra principală $J_W(a)$ poate gi caracterizată astfel : fie $W_1 = J_F(a)$ și pentru $k \geqslant I$ fie $W_{k+1}(a) = J_F(b / b \beta A$ și $W_k(a) \cap \bigcap I(b) \neq \Phi)$, atunci

$$J_W(a) = \sum_{k=1}^{\infty} W_k(a).$$

Demonstrație. Din construcția șirului de subalgebre $W_k(a)$ rezultă că are loc relația : $W_k(a) \subseteq W_{k+1}(a)$ pentru $k=1, 2, \ldots$. Deoarece W-subalgebrele $W_k(a)$ formează un lanț, rezultă că $\bigcup_{k=1}^{\infty} W_k(a)$ este de asemenea o W-subalgebră.

Dacă $f_\gamma(a_1, \ldots, a_{n_\gamma}) \in \bigcup_{k=1}^{\infty} W_k(a)$ atunci $f_\gamma(a_1, \ldots, a_{n_\gamma}) \in W_k(a)$ pentru un oarecare $k \in N$. Din definiția idealului de algebră rezultă că $f_\gamma(a_1, \ldots, a_{n_\gamma}) \in I(a_t)$ pentru fiecare $t=\overline{I, n, \gamma}$ astfel că $a_i \in W_{k+1}(a) \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} W_k(a)$. Deci $\bigcup_{k=1}^{\infty} W_k(a) \in S_W(U)$ și include W-subalgebre $J_W(\{a\})$.

Reciproc, dacă $W \in S_W(U)$ și a W, atunci evident că $W_1(a) \subseteq W$. Vom demonstra prin reducere la absurd că are loc incluziunea :

$$(I) \qquad \bigcup_{k=1}^{\infty} W_k(a) \subseteq W.$$

Dacă relația (I) n-ar avea loc, ar exista un $k \in N$ astfel ca $W_k(a) \subseteq W$ și $W_{k+1}(a)$ W. Deci ar exista $b \in W(a)$ și $b \notin W$ astfel că $b \in U - W$. Cum $U - W$ este un ideal de algebră, rezultă că $I(b) \in U - W$ și $W \cap I(b) = \varnothing$. Dar $b \in W_{k+1}(a)$ și deci are loc condiția $W_k(a) \cap I(b) \neq \varnothing$. Deoarece $W_k(a) \subseteq W$, am ajuns la o contradicție.

BIBLIOGRAFIE

[1] R. S. Pierce, Introduction to the theory of abstract algebras, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1968.
[2] T. Wolfe, You can't go home again, Harper, New-York, 1940.
[2] T. Wolfe, You can't go home again, Harper, New/York, 1940.
[3] B. Jonsson and E. Nelson, Relatively free products in regular varieties, Algebra Universalis, vol. 4/I, 1974.
[4] I. I. Melmk, O mnogoobrazijach Ω-algebr, Issl. po algebre, vyp. I, Saratov, 1969, 32—40.
[5] C. Uroşu, Ideale de algebre universale (va apare), Buletinul științific și tehnic al I.P.T.V.T.

W-SUBALGÈBRES DES ALGÈBRES UNIVERSALLES

(RÉSUMÉ)

Dans le travail on étudié quelqués proprietes des Thomas Wolfe subalgèbres (W-subalgèbres). On determiné les element compacts dans la latice algèbrique $S_W(U)$ des W-subalgebres. Avec la notion de l'ideal d'algèbre, on établié une formule pour engendrer les W-subalgebres principales.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara

Tom 26 (40) **Fascicola 1—1981**

SERIA MATEMATICĂ-FIZICĂ

S-CONGRUENTE ÎN VARIETĂŢI REGULATE DE ALGEBRE UNIVERSALE

DE

CARMENCITA UROŞU

Primită la redacţie 19 I 80

1. Noţiunea de varietate regulată de algebre universale a fost introdusă de A. Malţev în [1] şi mai recent caracterizată în lucrările lui G. Grätzer [2], B. Csákány [3], J. Plonka [4].

Identitatea $s=t$, $s, t \in \mathcal{B}_n^\tau$ se numeşte regulată dacă fiecare variabilă ce se află în s, se află de asemenea şi în t şi invers. O varietate $\mathcal{V}$ este regulată dacă fiecare identitate, din sistemul Σ de identităţi ce caracterizează varietatea, este regulată.

Clasa tuturor modelelor pentru sistemul de identităţi :

$$(S) = \begin{cases} p(x, \ldots, x) = x \\ p(x_1, \ldots, x_n) = q(x_1, \ldots, x_n),\ p, q \in \mathcal{B}_n^\tau,\ n \in N \end{cases} \tag{1}$$

este o varietate regulată : $\mathcal{V}_S$.

B. Jonsson în [5] şi H. P. Gumm în [6] au arătat că o condiţie echivalentă pentru ca $\mathcal{V}$ să fie varietate regulată este ca : $\mathcal{V}_S \subseteq \mathcal{V}$.

Conform corolarului 2.8. [5] o varietate este regulată d. şi n.d. $2_\tau \in \mathcal{V}$, unde 2_τ este algebra definită astfel :

$$2_\tau = \{0, 1\},\ f_\gamma > \gamma \in \Gamma \text{ şi } \forall a = (a_k)_k \in \tau(f)_\gamma,$$

$$f_\gamma(a) = \begin{cases} I \text{ dacă } a_k = I \text{ pentru orice } k \in \tau(f_\gamma) \\ 0 \text{ dacă } a_k = 0 \text{ pentru un oarecare } k \in \tau(f_\gamma). \end{cases}$$

Evident $2_\tau \in \mathcal{V}_S$ şi $\mathcal{V}_S = \mathrm{HSP}(2_\tau)$.

2. Considerăm că $\{f_\gamma,\ \gamma \in \Gamma\}$ nu conţine operaţii nulare şi unare şi conţine cel puţin o operaţie binară. Atunci sistemul de identităţi (S) implică proprietatea de idempotenţă, comutativitate şi asociativitate pentru orice operaţie binară. Deci $\mathcal{V}_S$ poate fi identificată cu varietatea tuturor semilaticilor. Operaţiile fundamentale f_γ pot fi descrise astfel cu operaţia binară „V" : $f_\gamma(x_1, \ldots, x_{n_\gamma}) = x_1 V x_2 V \ldots V x_{n_\gamma}$.

Fie $U = \langle A, F \rangle \in \mathcal{V}$. Notăm $\mathcal{C}(U)$ laticea congruenţelor pe algebra U.

Definiţia. Congruenţa $\theta \in \mathcal{C}(U)$ se numeşte S-congruenţă pe algebra U dacă $U \diagdown \theta \in S$./

Notăm cu $\mathcal{C}_S(U)$ mulţimea S-congruenţelor.

Observație. Dacă $\theta \in \mathscr{C}_S(U)$, din condiția $U/\theta \in \mathscr{V}_S$ rezultă că U/θ verifică sistemul de axiome (S) :

$$p([a], \ldots, [a]) = [a] \quad \forall p \in \mathscr{B}_n^\tau,\ n \in N$$

și

$$p([a_1]\theta, \ldots, [a_n]\theta) = q([a_1])\theta, \ldots, [a_n]\theta) = [a_1]\theta \vee \ldots \vee [a_n]\theta$$

pentru $\forall p, q \in \mathscr{B}_n^\tau$.

Deci dacă $b \in [a]\theta$ rezultă $p(b, \ldots, b) \in [a]\theta$ și $\forall p, q \in \mathscr{B}_n^\tau$ are loc relația : $[p(a_1, \ldots, a_n)]\theta = [q(a_1, \ldots, a_n)]\theta$. Algebra U/θ are proprietățile unei semilatice.

Propoziția 1. $\mathscr{C}_S(U)$ este o sublatice completă a laticei $\mathscr{C}(U)$.

Demonstrație.

$\mathscr{C}_S(U)$ este închisă relativ la reuniunea unei familii arbitrare de congruențe din laticea $\mathscr{C}(U)$. Dacă $\theta_1 \subseteq \theta_2$ și θ_1 este o S-congruență, atunci rezultă că și θ_2 este o S-congruență deoarece $U/\theta_1 \in \mathscr{V}_S$ și conform celei de a treia teoreme de izomorfism are loc relația ;

$$U/\theta_2 \cong U/\theta_1/\theta_2 \mid \theta_1 \in \mathscr{V}_S.$$

Deoarece $\mathscr{V}_S$ este o varietate de algebre, $\mathscr{C}_S(U)$ este închisă relativ la intersecții arbitrare și deci există o congruență minimă θ min pe U astfel că θ min $\in \mathscr{C}_S(U)$. Deci $\mathscr{C}_S(U)$ este un filtru (ideal dual) al laticei $\mathscr{C}(U)$: $\mathscr{C}_S(U) = [\theta \text{ min}).$/

Corolar. Are loc izomorfismul :

$$\mathscr{C}_S(U) \cong \mathscr{C}(U/\theta \text{ min}).$$

Dacă $\theta \in \mathscr{C}_S(U)$, are loc următoarea proprietate :

Propoziția 2. Fiecare θ-clasă este o subalgebră a algebrei U.

Demonstrație. Fie $\theta \in \mathscr{C}_S(U)$ și $x_1, \ldots, x_n \in [x]\theta$; $U/\theta \in \mathscr{V}_S$. Identitatea (1) din (S) are loc în algebra U/θ și deci pentru un oarecare $p \in \mathscr{B}_n^\tau$ (acest p poate să fie și o operație f_γ din F) avem :

$$[p(x_1, \ldots, x_n)] = p([x_1], \ldots, [x_n]) = p([x], \ldots, [x]) = [x]$$

și deci $[x]$ este o subalgebră a algebrei U.

Pentru o congruență $\theta \in \mathscr{C}(U)$ și $B \in S(U)$ (subalgebrele algebrei U), în general B nu coincide cu o reuniune de θ-clase. Introducem următoarea noțiune :

Definiția 2. Subalgebra $B \in S(U)$ este θ-convexă dacă ea coincide cu reuniunea θ-claselor ce au intersecție nevidă cu B.

Vom scrie $B = [B]_\theta = a \in B$ și $c \equiv a(\theta) \Rightarrow c \in B$.

Observație. Dacă $\theta_1 \subseteq \theta_2$ rezultă $[B]_{\theta_1} = [B]_{\theta_2}$ și deci fiecare subalgebră θ_2-convexă este și θ_1-convexă. Dacă $\theta \in \mathscr{C}_S(U)$ înseamnă că θ-clasele din B sînt subalgebre și dacă B este θ-convexă, atunci este și θ min-convexă.

Considerăm laticea $S_w(U)$ a W-subalgebrelor algebrei U. O W-subalgebră are proprietatea că $\forall \gamma \in \Gamma$ și $a = (a_k)$ $k \in \overline{1, n_\gamma} \in A^{\tau(f\gamma)}$, $f_\gamma(a) \in B$ implică $a_k \in B$ pentru orice $k = \overline{1, n_\gamma}$. (def. 2.1 [5]). Pentru $\theta \in \mathscr{C}_S(U)$ vom nota cu $S_w^\theta(U)$ mulțimea W-subalgebrelor θ-convexe.

Propoziția 3. Operatorul J_θ definit pe $S_w(U)$ astfel :

$$J_\theta(V) = \bigcap \{V_\alpha \setminus V_\alpha \in S_w^\theta(U) \text{ și } V \subset V_\alpha\}$$

este un operator algebric și $J_\theta(S_w(U))$ este o latice algebrică.

Demonstrație. Deoarece U este o W-subalgebră rezultă că J_θ este totdeauna definit. Considerăm o familie nevidă dirijată la dreapta de elemente din $S_w^\theta(U) : (V\delta,\ \delta \in \Delta)$. Vom arăta că $V=(V_\delta/\delta \in \Delta)$ este o W-subalgebră θ-convexă. Fie $a \in V$ și $c \equiv a(\theta)$. Rezultă că există V_δ astfel încît $a \in V_\delta$. Dar V_δ fiind θ-convexă rezultă că $c \in V\delta$ ceea ce implică $c \in V$.

Observație. Deoarece $\theta_1 \subseteq \theta_2$ implică $J_{\theta_1}(S_w(U)) \subseteq J_{\theta_2}(S_w(U))$ rezultă că corespondența $\eta : \theta \to J_\theta$ este izotonă.

Conform [7] notăm mulțimea elementelor compacte ale laticei $S_w(U)$ cu $S_w^*(U)$ și cu J_θ operatorul de închidere corespunzător sistemului de închidere $S_w(U)$ pe $S(U)$.

Propoziția 4. Congruența $\theta \min \in \mathcal{C}_C(U)$ este caracterizată de condiția :

$$a \equiv b\ (\theta \min) \Leftrightarrow J_w(a) = J_w(b)$$

și are loc izomorfismul :

$$U/\theta \min \cong S_w^*(U) - \varnothing$$

Demonstrație. Vom arăta că $J_w(a)$ este o subalgebră θ min-convexă, ceea ce este echivalent cu faptul că din $a \in J_w(a)$ și $c \in [a]_{\theta\ min}$ rezultă $c \in J_w(a)$.

Dacă $c \in [a]_{min}$ rezultă că pentru orice $p \in \mathcal{B}_n^\tau$ avem $p(c, \ldots, c) \in [a]_{\theta\ min}$ și $[a]_{\theta\ min}$ este cea mai mică subalgebră cu această proprietate.

Conform [7], $J_w(a) = \bigcup_{k+1}^{\infty} W_k(a)$ unde $W_k(a)$ este subalgebra generată astfel : $W_1(a) = J_F(a)$,

$$W_k(a) = J_F\{b/b \in A \text{ și } W_{k-1}(a) \cap I(b) \neq \varnothing\}.$$

Deoarece $p(c, \ldots, c) \in [a]_{\theta\ min}$ rezultă că $I(c) \subseteq [a]_{\theta\ min}$ și din relația $J_w(a) = \bigcup_{k=1}^{\infty} W_k(a)$ rezultă că $p(c, \ldots, c) \in J(a)$. Cum $J_w(a)$ este o W-subalgebră, rezultă că $c \in J_w(a)$.

Deoarece $J_w(a)$ este θ_{min}-convexă, din $[a]_{\theta\ min} = [b]_{\theta\ min}$ rezultă că $b \in [a]_{\theta\ min} \subseteq J_w(a)$ și deci $J_w(b) \subseteq J_w(a)$. Analog are loc relația $J_w(a) \subseteq J_w(b)$ și deci $J_w(a) = J_w(b)$.

Reciproc, dacă $J_w(a) = J_w(b)$, avem $J_w(a) \subseteq [a]_{\theta\ min}$ ($[a]_{\theta\ min}$ fiind o subalgebră) și deci $b \in [a]_{\theta\ min}$. Rezultă că o θ_{min} clasă este o W-subalgebră generată de orice reprezentant al clasei.

Conform propoziției 3 [7], mulțimea elementelor compacte $S_w^*(U)$ se compune din $\varnothing$ și W-subalgebrele principale. Deci $S_w^*(U) - \{\varnothing\}$ este în corespondență bijectivă cu algebra U/θ_{min} și are loc izomorfismul :

$$U/\theta_{min} \cong S_w^*(U) - \{\varnothing\}.$$

Corolar. Are loc izomorfismul :

$$\mathcal{C}_S(U) \cong \mathcal{C}(S_w^*(U) - \{\varnothing\}).$$

BIBLIOGRAFIE

[1] A. Maltev, On the general theory of algebraic systems, Mat. Sb. N.S. 35 (1954), 3—20

[2] G. Grätzer, Two Mal'cev-typ Theorems in universal algebra, J. Comb. Theory 8 (1970 234—342.

[3] B. Csakany, Characterizations of regular varieties, Acta Math. (Szeged) 31 (1970), 187—189.

[4] J. Plonka, On equational classes of abstract algebras defined by regular equations, Fund. Math. 64 (1969), 241—247.
[5] B. Jonsson and E. Nelson, Relatively free products in regular varieties, Algebra universalis, vol. 4/1, 1974.
[6] H. P. Gumm, Congruence-equalities and Mal'cev conditions in regular equational classes, Acta .Sci. Math. 39 (1977), 265—272.
[7] C. Uroşu, W-subalgebre ale algebrelor universale (va apare) Buletinul ştiinţific şi tehnic al I.P.T.V.T.

S-CONGRUENCES DANS UNE VARIÉTÉ DES ALGÈBRES UNIVERSELLES

(RÉSUME)

Dans cet ouvrage sont definiés les S-congruences sur une algèbre $U \in \mathcal{V}$, ou $\mathcal{V}$ est une variété régulière, par la conditions $\theta \in \mathcal{C}_S(U) \Leftrightarrow U/\theta \in \mathrm{HSP}(2_\tau)$. On montre que $\mathcal{C}_S(U)$ est une latice algèbrique et $\mathcal{C}_S(U) \cong [\theta_{min})$. Pour $\theta \in \mathcal{C}_S(U)$ on établit une lieson entre les W-subalgèbres θ-convex et l'algèbre U/θ_{min}.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara

Tom 26 (40) **Fascicola 1—1981**

SERIA MATEMATICĂ-FIZICĂ

SLIP MOVEMENTS IN THE SECOND APROXIMATION ON A PLANE PLATE

BY

STEFAN I. MAKASAY

Primită la redacţie 25 I 1980

A series of experiences [1] concerning the dynamics of the real fluids performed in the $0{,}008 < M\sqrt{\mathrm{Re}} < 0{,}38$ field, M being Mach's number and Re Reynolds'number, proved the existence of the slip phenomenon on a wall.

The work [2] is concerned with the distribution of the longitudinal component part of velocity in the boundary layer formed along a plane plate attacked under a null incidence angle by a uniform current of incompressible viscous fluid, supposing slip in the first approximation on the wall. In [3] this research takes into consideration the temperature distribution.

In the present note, generalizing [2] we study the distribution of velocity supposing slip in the second approximation on the plate.

The dynamic phenomenon is described by the equations [4]

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\gamma\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0, \tag{1}$$

with the boundary conditions [1]

$$u=L_1\frac{\partial u}{\partial y}+L_2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\ v=0,\ \text{for } y=0$$

$$u\to 1,\ \text{for } x=0,\ y\to\infty. \tag{2}$$

Applying two changes of variable, the first from (x, y) to (x, ψ), ψ being the current function [4], the second from (x, ψ) to (ξ, η) where

$$\xi=\frac{2\sqrt{\nu x}}{L_1},\qquad \eta=\frac{\psi}{2\sqrt{\nu x}}, \tag{3}$$

the equation of movement becomes

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(u\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)+2\eta\frac{\partial u}{\partial\eta}=2\xi\frac{\partial u}{\partial}, \tag{4}$$

Notations

x, y — coordinates of the boundary layer, x is measured on the plate from the attack board in direction of the current and y is measured on the normal to the plate ;

u, v — projections of the fluid parcticle velocity on the axis of the Ox and Oy coordinates ;

μ, ν, ρ — dynamic and kinematic viscosity coefficients, density ($\mu=\nu\rho$).

and the boundary conditions become

$$\frac{L_2}{L_1^2}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(u\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)+\xi\frac{\partial u}{\partial\eta}=\xi^2, \qquad \text{for } \eta=0$$

$$u\to 1, \qquad \text{for } \eta\to\infty. \tag{5}$$

Considering

$$u(\xi,\eta)=1+\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\eta)\cdot\xi^n, \tag{6}$$

for determining functions $f_n(\eta)$ it results the system

$$\begin{aligned} &f_1''+2\eta f_1'-2f_1=0,\\ &f_2''+2\eta f_2'-4f_2=-(f_1'^2+f_1f_1''),\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{7}$$

to which the boundary conditions

$$\frac{L_2}{L_1^2}f_1''(0)=0,\ f_1(\infty)=0,$$

$$\frac{L_2}{L_1^2}\left(f_2+\frac{1}{2}f_1^2\right)''(0)+f_1'(0)=1,\ f_2(\infty)=0, \tag{8}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

are attached.

Therefore, the functions $f_n(\eta)$ which occur in expression (6) of $u(\xi,\eta)$ are determined by means of a method of iteration. In the particular case where the constant L_2 is null, the expression of the functions $f_1(\eta)$ and $f_2(\eta)$ is given in [2].

REFERENCES

[1] Schaaf, S. A., Sherman, F. S., J. Aeronaut. Sci. 21, N4r. 2, 85—14, (1953);
[2] Hasimoto, H., Mehanika, 4 (50), Nr. 41, (1958);
[3] Maksay, S., Bull. Math. de la Soc. Sci. Math., R.S.R., t 20 (69), nr. 1—2, (1976);
[4] Brădeanu, P., Mecanica fluidelor, Ed. tehnică, București, 1973;

MIȘCĂRI CU ALUNECARE ÎN APROXIMAȚIA A DOUA PE O PLACĂ PLANĂ

(REZUMAT)

În nota de față se studiază distribuția componentei longitudinale a vitezei în stratul limită care se formează de-a lungul unei plăci plane atacată sub unghi de incidență nul de un curent uniform de fluid vîscos incompresibil presupunînd alunecarea în aproximația a doua pe perete.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara

Tom 26 (40) **Fascicola 1—1981**

SERIA MATEMATICĂ-FIZICĂ

HIPERGRAFURI ν-CONEXE

DE

GH. SUCIU

Primită la redacţie 20 II 80

În lucrarea de faţă se consideră conceptul de hipergraf, unele notaţii şi definiţii avînd sensul conferit acestora, prin [1] şi [3].

Fie X o mulţime finită de elemente şi $\mathcal{E}$ o familie de părţi ale lui X, astfel ca

(1) $E \in \mathcal{E} \rightarrow E \neq \emptyset$;

(2) $\bigcup_{E \in \mathcal{E}} E = X$

Cuplul $H=(X, \mathcal{E})$ se numeşte hipergraf. Un hipergraf $H=(X, \mathcal{E})$ se numeşte simplu, dacă elementele familiei $\mathcal{E}$ sînt distincte, în caz contrar H se numeşte multiplu. În cele ce urmează vom considera hipergrafuri simple.

Notăm prin $\nu(H)$ cardinalitatea unui cuplaj maxim (sau numărul maxim de muchii distincte două cîte două, din H).

Conexitatea unui hipergraf se defineşte prin existenţa unui lanţ, (v. [1], cap. 17, §2), între două vîrfuri oarecare ale hipergrafului.

Dacă x este un vîrf al hipergrafului H, atunci H_x reprezintă hipergraful parţial format din mulţimea tuturor muchiilor lui H, care-l conţin pe x. (v. [2]).

Un hipergraf $H=(X, \mathcal{E})$ se numeşte ν-stabil dacă pentru orice $x \in X$, are loc

$$\nu(H-H_x)=\nu(H) \quad \text{(v. [4])}.$$

Definiţia 1. Un hipergraf $H=(X, \mathcal{E})$ se numeşte ν-convex, dacă pentru orice bipartiţie $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ a lui $\mathcal{E}$, are loc

$$\nu([\mathcal{E}_1]_H)+\nu([\mathcal{E}_2]_H) \geqslant \nu(H)+1.$$

Propoziţia 1. Un hipergraf Hν-conex este conex.

Demonstraţie. Presupunem că H este ν-conex şi nu este conex. Aces fapt implică existenţa unei b.partiţii $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ a lui $\mathcal{E}$, cu $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2=\varnothing$ şi dec

$$\nu([\mathcal{E}_1]_H)+\nu([\mathcal{E}_2]_H)=\nu(H)$$

ceea ce dovedeşte că H nu este ν-conex şi propoziţia este demonstrată.

Propoziţia 2. Orice hipergraf ν-conex este şi ν-stabil.

Demonstraţie. Fie Hν-conex şi H_x un hipergraf parţial al lui H, atunci

$$\nu(H_x)=1 \text{ şi } \nu(H_x)+\nu(H-H_x) \geqslant \nu(H)+1$$

deci

$$\nu(H-H_x) \geqslant \nu(H)$$

şi ţinînd cont că

$$\nu(H-H_x) \geqslant \nu(H)$$

obținem

$$\nu(H-H_x)=\nu(H)$$

Teorema 1. Un hipergraf $H=(X, \mathcal{E})$ este ν-conex dacă și numai dacă pentru orice descompunere $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ a lui $\mathcal{E}$, există un cuplaj $\mathcal{E}_1^0$ în $[\mathcal{E}_1]_H$ și un cuplaj $\mathcal{E}_2^0$ în $[\mathcal{E}_2]_H$ încît $\mathcal{E}_1^0 \cup \mathcal{E}_2^0$ nu este cuplaj în H.

Demonstrație. Fie H ν-conex și $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ o partiție a mulțimii muncilor lui $\mathcal{E}$, atunci

$$\nu([\mathcal{E}_1]_H)+\nu([\mathcal{E}_2]_H) \geqslant \nu(H)+1$$

Considerăm un cuplaj maximal $\mathcal{E}_1'$ în H_1, iar $\mathcal{E}_2'$ un cuplaj maximal în H_2, obținem

$$|\mathcal{E}_1' \cup \mathcal{E}_2'|=|\mathcal{E}_1'|+|\mathcal{E}_2'|=\nu(H_1)+\nu(H_2) > \nu(H)$$

ceea ce demonstrează că $\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2'$ nu este cuplajul în H.

Invers, fie $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ o bipartiție oarecare a mulțimii muchiilor lui $\mathcal{E}$, dacă ar avea loc

$$\nu(H_1)+\nu(H_2) \leqslant \nu(H)$$

atunci, fie $\mathcal{E}_0$ un cuplaj maximal în H, iar

$$\mathcal{E}_1^0 = \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_0 \text{ și } \mathcal{E}_2^0 = \mathcal{E}_2 \cap \mathcal{E}_0.$$

Mulțimile $\mathcal{E}_1^0$ și $\mathcal{E}_2^0$ sînt cuplaje maximale în H_1 respectiv în H_2, deoarece dacă ar exista un cuplaj $\mathcal{E}_1'$ cu $|\mathcal{E}_1'| > |\mathcal{E}_1^0|$, ar implica $\nu(H_1)+\nu(H_2) \geqslant |\mathcal{E}_1'|+|\mathcal{E}_2^0| > |\mathcal{E}_1^0|+|\mathcal{E}_2^0|=\nu(H)+1 > \nu(H)$
ceea ce contrazice ipoteza.

Definiția 2. Fie $H=(X, \mathcal{E})$ un hipergraf ν-conex. Numim mulțime de ν-articulație o mulțime de muchii $\mathcal{E}_0 \subseteq \mathcal{E}$ pentru care : există o bipartiție $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ a lui $\mathcal{E}$, încît pentru orice cuplaj maximal $\mathcal{E}_1^0$ din $[\mathcal{E}_1]_{H-\mathcal{E}_0}$ respectiv $\mathcal{E}_2^0$ din $[\mathcal{E}_2]_H-\mathcal{E}_0$ să rezulte că $\mathcal{E}_1^0 \cup \mathcal{E}_2^0$ este un cuplaj maximal în $H-\mathcal{E}_0$.

Teorema 2. Dacă $H=(X, \mathcal{E})$ este un hipergraf ν-conex, iar $\mathcal{E}_0 \subseteq \mathcal{E}$ o mulțime de ν-articulație, atunci $\nu[\mathcal{E}_0]_H \geqslant 2$.

Demonstrație. Fie $\mathcal{E}_0$ o mulțime de articulație și $\nu([\mathcal{E}_0]_H)=1$, atunci conform propoziției 2 are loc

$$\nu(H-\mathcal{E}_0)=\nu(H).$$

Deoarece $\mathcal{E}_0$ este mulțime de articulație, rezultă că $H-\mathcal{E}_0$ nu este ν-conex și în consecință există o bipartiție $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ a lui $\mathcal{E}-\mathcal{E}_0$, încît

$$\nu([\mathcal{E}_1]_{H-\mathcal{E}_0})+\nu([\mathcal{E}_2]_{H-\mathcal{E}_0})=(H-\mathcal{E}_0)=\nu(H).$$

Însă pentru orice $E \in \mathcal{E}_0$ avem :

$$\nu([\mathcal{E}_1] \cup \{E\}]_H)=\nu([\mathcal{E}_1]_H)+1.$$

sau

$$\nu([\mathcal{E}_1] \cup \{E\}]_H)=\nu([\mathcal{E}_1]_H)$$

Presupunînd că

$$\nu([\mathcal{E}_1] \cup \{E\}]_H)=\nu([\mathcal{E}_1]_G)+1$$

demonstrăm egalitatea :

$$\nu([\mathcal{E}_2 \cup \{E\}]_H)=\nu([\mathcal{E}_2]_H).$$

În adevăr, dacă

$$\nu([\mathcal{E}_2 \cup \{E\}]_H)=\nu([\mathcal{E}_2]_H)+1$$

atunci există $\mathcal{E}_1$ aparținînd cuplajelor maximale din H_1 și $\mathcal{E}_2$ aparținînd cuplajelor maximale din H_2, astfel încît

$$\mathcal{E}_1 \cup \{E\} \cup \mathcal{E}_2$$

să aparțină cuplajelor maximale din H.

Însă, deoarece

$$|\mathcal{E}_1 \cup \{E\} \cup \mathcal{E}_2| = \nu(H)+1$$

se ajunge la contradicție.

Fie mulțimile

$$\mathcal{E}_0^1 = \{E \in \mathcal{E}_0 \mid \nu(\mathcal{E}_1 \cup \{E\}) = \nu([\mathcal{E}_1]_H)$$

$$\mathcal{E}_0^2 = \{E \in \mathcal{E}_0 \mid \nu(\mathcal{E}_2 \cup \{E\}) = \nu([\mathcal{E}_2]_H)$$

care constituie o bipartiție a lui $\mathcal{E}_0$.

Considerăm

$$\mathcal{E}_1' = \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_0^1 \text{ și } \mathcal{E}_2' = \mathcal{E}_2 \cup \mathcal{E}_0^2$$

o bipartiție a lui $\mathcal{E}$, avem

$$\nu([\mathcal{E}_1]_H + \nu([\mathcal{E}_2]_H) = \nu([\mathcal{E}_1]_H) + \nu([\mathcal{E}_2]_H) = \nu([\mathcal{E}_1]_{H-\mathcal{E}_0}) +$$

$$+ \nu([\mathcal{E}_2]_{H-\mathcal{E}_0}) = \nu(H - \mathcal{E}_0) = \nu(H).$$

Se obține, deci, pentru bipartiția $\mathcal{E}_1'$, $\mathcal{E}_2'$

$$\nu([\mathcal{E}_1']_H) + \nu([\mathcal{E}_2']_H) = \nu(H)$$

ceea ce contrazice că H este ν-conex și în consecință

$$\nu([\mathcal{E}_0]_H) \geqslant 2.$$

BIBLIOGRAFIE

[1] Berge, C., Graphes et hypergraphes. Dunod, Paris 1970.

[2] Lovasz, L., Normal hypergraphes and the perfect graph conjecture. Discr. Math. 2, 1972, p. 253—268.

[3] Olaru, E., Introducere în teoria grafurilor, Iași 1975.

[4] Suciu, Gh. Hipergrafuri ν-stabile și Hipergrafuri critic imperfecte. Analele Univ. Timișoara. Seria Științele Matematice

RÉSUMÉ

Le travail contient les notions d'hipergraphes ν-conex, presentant certaines caracterisations structurelles de ces hypergraphes.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara

Tom 26 (40) **Fascicola 1—1981**

SERIA MATEMATICĂ-FIZICĂ

ALMOST CONTACT FINSLER CONNECTIONS

BY

GHEORGHE ATANASI[8] AND FRANCISC KLEPP

Primită ila redacţie 14 III 1980

The almost contact structure has been introduced and studied by S. Sasaki [10], C. J. Hsu [5], J. Bouzon [2], V. Oproiu [9] and other, Gh. Atanasiu studying the pair of connections compatible with these structures [1].

Knowing that the almost contact structure corresponds to the almost complex structure as the cosimplectic structure corresponds to the almost simplectic structure, some autors call it cocomplex structure. We will use the terminology given by S. Sasaki.

In this paper we will define the almost contact Finsler structure and we will determine the set of Finsler connections compatible with this structure. To define the Finsler connections we will use the M. Matsumoto monography [6] and to solve our problems we will use the recent results of R. Miron and M. Hashiguchi [3], [4], [7].

1. We consider a m-dimensional manifold M_m of class C^∞ A Finsler connection $F\Gamma$ on M_m is a triplet $F\Gamma=(N^i_j, F^i_{jk}, C^i_{jk})$ which through a transformation of coordinates on M_m and a transformation of element of support :

$$x^{i'}=x^{i'}(x^i)\,; \quad y^{i'}=\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}y^i \tag{1.1}$$

changes by :

$$N^{i'}_{j'}(x', y')=\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}N^i_j(x, y)+\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{r'}}\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}y^k$$

$$F^{i'}_{j'k'}(x', y')=\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}F^i_{jk}(x, y)+\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}} \tag{1.2}$$

$$C^{i'}_{j'k'}(x', y')=\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}C^i_{jk}(x, y)$$

With the aid of the geometric objects N^i_j, F^i_{jk}, C^i_{jk} we can define the covariant h-derivative and the covariant v-derivative, which for exemple for a (1.1) Finsler tensor field $K^i_j(x, y)$ have respective the expressions :

$$K^i_{j|k}=\frac{\delta K^i_j}{\delta x^k}+F^i_{ak}K^a_j-F^a_{jk}K^i_a$$

$$K^i_{j|k}=\frac{\partial K^i_j}{\partial y^k}+C^i_{ak}K^a_j-C^a_{jk}K^i_a \tag{1.3}$$

Where :

$$\frac{\delta}{\delta x^k}=\frac{\partial}{\partial x^k}-N_k^a\frac{\partial}{\partial y^a}$$

The Ricci identities, applied to the $K_j^i(x, y)$ tensor field, are :

$$\begin{aligned}
K^i_{j|k|e}-K^i_{j|e|k}&=-K^i_aR^a_{jke}+K^a_jR^i_{ake}-K^i_{j|a}T^a_{ke}-K^i_{j|_a}R^a_{ke}\\
K^i_{j|k|_e}-K^i_{j|e|k}&=-K^i_aP^a_{jke}+K^a_jP^i_{ake}-K^i_{j|a}C^a_{ke}-K^i_{j|_a}P^a_{ke}\\
K^i_{j|_k|_e}-K^i_{j|_e|_k}&=-K^i_aS^a_{jke}+K^a_jS^i_{ake}-K^i_{j|_a}S^a_{ke}
\end{aligned}\tag{1.4}$$

when T, R^1, C, P^1, S^1 are the torsion tensors of the $F\Gamma=(N, F, C)$ Finsler connection :

$$T: T^i_{jk}=F^i_{jk}-F^i_{kj};\quad R^1: R^i_{jk}=\frac{\delta N^i_j}{\delta x^k}-\frac{\delta N^i_k}{\delta x^j}$$

$$C: C^i_{jk};\ P^1: P^i_{jk}=\frac{\partial N^i_j}{\partial y^k}-F^i_{kj};\ S^1:\ S^i_{jk}=C^i_{jk}-C^i_{kj}\tag{1.5}$$

and when R^2, P^2, S^2 are the curvature tensors of the same F connection :

$$R^2: R^i_{jke}=\frac{\delta F^i_{jk}}{\delta x^e}-\frac{\delta F^i_{je}}{\delta x^k}+F^a_{jk}F^i_{ae}-F^a_{je}F^i_{ak}+C^l_{ja}R^a_{ke}$$

$$P^2:\ P^i_{jke}=\frac{\partial F^i_{jk}}{\partial y^e}-C^i_{je|k}+C^i_{ja}P^a_{ke}\tag{1.6}$$

$$S^2:\ S^i_{jke}=\frac{\partial C^i_{jk}}{\partial y^e}-\frac{\partial C^i_{je}}{\partial y^k}+C^a_{i\,k}C^i_{ae}-C^a_{je}C^i_{ak}$$

2. In the following, let us admite that the dimension of the manifold is $m=2n+1$.

Definition 2.1. An almost contact Finsler structure on M_{2n+1} is defined by : 1) a (1.1) Finsler tensor field, for instance $J_j^i(x, y)$, y being the element of support in the point x ; with the property :

$$rank\,[J^i_j(x, y)]=2n\tag{2.1}$$

2) a Finsler covector field $\eta_k(x, y)$ and 3) a Finsler vector field (x, y) such that :

$$\eta_iJ^i_j=0;\ \xi^iJ^i_j=0;\ \eta_i\xi^i=1;\ J^i_jJ^h_i=-\delta^h_j+\eta_j\,\xi^h\tag{2.2}$$

To an almost contact Finsler structure $(J^i_j,\ \eta_j,\ \xi^i)$ we associate the Oproiu operators [9] :

$$\Phi^{kh}_{ij}=\frac{1}{2}(\delta^k_i\delta^h_j-J^k_iJ^h_j);\ \Psi^{kh}_{ij}=\frac{1}{2}(\delta^h_i\delta^h_j+J^k_iJ^h_j)$$

$$\Theta^{kh}_{ij}=\frac{1}{2}(\delta^k_i\eta_j\xi^h+\eta_i\xi^k\delta^h_j-\eta_i\xi^k\eta_j\xi^h)\tag{2.3}$$

which satisfy the relations :

$$\Phi+\Psi=\delta\cdot\delta\,;\ \Phi\cdot\Phi=\Phi-\frac{1}{2}\Theta\,;\ \ \Psi\cdot\Psi=\Psi-\frac{1}{2}\Theta$$

$$\Phi\cdot\Psi=\Psi\cdot\Phi=\Phi\cdot\Theta=\Theta\cdot\Phi=\Psi\cdot\Theta=\Theta\cdot\Psi=\Theta\cdot\Theta=\frac{1}{2}\Theta \tag{2.4}$$

We have the following result due to V. Oproiu [9] :

Proposition 2.1. The $\underset{1}{Q}$ and $\underset{2}{Q}$ operators given by :

$$\underset{1}{Q}=\Phi-\Theta\,;\ \ \underset{2}{Q}=\Psi+\Theta \tag{2.5}$$

have the following properties :

$$\underset{1}{Q}+\underset{2}{Q}=\delta\cdot\delta\,;\ \underset{1}{Q}\cdot\underset{1}{Q}=\underset{1}{Q}\,;\ \underset{2}{Q}\cdot\underset{2}{Q}=\underset{2}{Q}\,;\ \underset{1}{Q}\cdot\underset{2}{Q}=\underset{2}{Q}\cdot\underset{1}{Q}=0 \tag{2.6}$$

i.e. They are Yano—Obata operators [8], [11].

Very useful will be the following lemma due to K. Yano [11] and M. Obata [8] :

Lemma 2.2. Let $\underset{1}{Q}$ and $\underset{2}{Q}$ be two operators with ths properties (2.6). For a tensor T the necessary and sufficient condition that the linear equation :

$$\underset{1}{Q}\cdot X=T \text{ resp. } \underset{2}{Q}\cdot X=T$$

has a solution is that :

$$\underset{2}{Q}\cdot T=0 \text{ resp. } \underset{1}{Q}\cdot T=0$$

In this case the general solution is given by :

$$X=\underset{2}{Q}\cdot Y+T \text{ resp. } X=\underset{1}{Q}\cdot Y+T$$

where Y is any Finsler tensor of the same type as X.

Here $(\Phi\cdot\Phi)^{kh}_{ij}=\Phi^{ah}_{ib}\Phi^{kb}_{aj}$, and the contraction of a (1.2) tensor T by Φ has the local expression $(\Phi T)^{i}_{jk}=\Phi^{ai}_{jb}T^{b}_{ak}$.

3. Our aime is to determine the Finsler connections $F\Gamma=(N, F, C)$ which satisfy the following system :

$$J^{i}_{j|k}=0,\ \ \eta_{j|k}=0 \tag{3.1}$$

$$J^{i}_{j}|_{k}=0,\ \ \eta_{j}|_{k}=0 \tag{3.2}$$

Definition 3.1. A Finsler connection $F\Gamma=(N, F, C)$ which satisfies the system (3.1) and (3.2) will be called compatible with the almost contact structure or we will call it an almost contact Finsler connection, or a (J, η, ξ)—Finsler, Connection.

Remark 3.1. From the relations (2.2) follows that $\xi^{i}_{|k}=0\,;\ \xi^{i}|_{k}=0$ for a (J, η, ξ)—Finsler Connection.

If $F\mathring{\Gamma}=(\mathring{N}, \mathring{F}, \mathring{C})$ denotes a fixed Finsler connection on M_{2n+1} we search the almost contact Finsler connections $F\Gamma=(N, F, C)$ in the form [7] :

$$N^{i}_{j}=\mathring{N}^{i}_{j}-X^{i}_{j}\,;\ F^{i}_{jk}=\mathring{F}^{i}_{jk}+\mathring{C}^{i}_{jk}X^{a}_{k}+B^{i}_{jk}\,;\ C^{i}_{jk}=\mathring{C}^{i}_{jk}+D^{i}_{jk} \tag{3.3}$$

where X^i_j, B^i_{jk}, D^i_{jk} are unknown Finsler tensors, which will be determined from the condition that (3.3) do satisfy the system (3.1), (3.2). Imposing this condition we are led to the system :

$$J^{i}_{j|k}+(J^{i}_{j|a})X^a_k-B^a_{jk}J^i_a+B^i_{ak}J^a_j=0\,;\quad \eta_{j}{}^{\circ}_{|k}+(\eta_{j}{}^{\circ}_{|a})X^a_k-B^a_{jk}\eta_a=0 \tag{3.4}$$

$$J^{i}_{j|k}-D^a_{jk}J^i_a+D^i_{ak}J^a_j=0\,;\qquad \eta_{j}{}^{\circ}_{|k}-D^a_{jk}\eta_a=0 \tag{3.5}$$

Here we applied (1.3) to J^i_j and η_j. $\overset{\circ}{|}$ and $\overset{\circ}{|}$ denote the covariant h-derivate respectively the covariant v-derivate of the considered fields, related to the fixed Finsler connection.

Multiplying the first equation from (3.4) and (3.5) by $\frac{1}{2}J^i_j$, summing and considering (2.2), (2.3), and the last equation from (3.4) and (3.5) we obtain the equivalence of the system (3.4), (3.5) with the following system :

$$\Psi^{bh}_{ja}B^a_{bk}=\frac{1}{2}\{J^a_j[(J^{h}_{a|k})+(J^{h}_{a|b})\,X^b_k]-\eta_j\,[(\xi^{h}_{|k})+(\xi^{h}_{|b})X^b_k]\} \tag{3.6}$$

$$\Psi^{bh}_{ja}D^a_{bk}=\frac{1}{2}\,[J^a_j(J^{h}_{a|k})-\eta_j\,(\xi^{h}_{|k})] \tag{3.7}$$

We observe that the equations (3.6) and (3.7) are equations of the following type :

$$\Psi\cdot\underset{a}{U}=\underset{a}{V}\qquad(a=1,\,2) \tag{3.8}$$

Using (2.4) we obtain from (3.8) the system : $\Theta\cdot\underset{a}{U}=2\Theta\cdot\underset{a}{V}$ $(a=1\,,2)$ and from here it results that the system (3.8) is equivalent with the system :

$$\underset{2}{Q}\cdot\underset{a}{U}=\underset{a}{V}+2\Theta\cdot\underset{a}{V}\quad(a=1.\,2) \tag{3.9}$$

According to lemma 2.2 the equations (3.9) have solutions if and only if :

$$\underset{1}{Q}\,(\underset{a}{V}+2\Theta\cdot\underset{a}{V})=(\Phi-\Theta)\cdot(\underset{a}{V}+2\Theta\underset{a}{V})=(\Phi-\Theta)\cdot\underset{a}{V}=\underset{1}{Q}\cdot\underset{a}{V}=0\quad(a=1,\,2) \tag{3.10}$$

If we use the expressions (2.3) of Φ and Θ, and we denote by $\underset{1}{V}$ and $\underset{2}{V}$ the membres on the right hand of the equations (3.6) respectively (3.7), we obtain by calculus that the equations (3.10) are satisfied in these cases. Then from Lemma 2.2. it results that (3.9) can be resolved and there general solutions are given by :

$$\underset{a}{U}=\underset{a}{V}+2\Theta\cdot\underset{a}{V}+(\Phi-\Theta)\cdot\underset{a}{Y}\quad(a=1,\,2) \tag{3.11}$$

where $\underset{1}{Y}$ and $\underset{2}{Y}$ are arbitrary Finsler Tensors in M_{2n+1}. We will denote $\underset{1}{Y}$ respectively $\underset{2}{Y}$ by Y respectively Z.

Concluding we can state the following **Theorem 3.1.:** Every Finsler connection $F\Gamma=(N, F, C)$ compatible with an almost contact Finsler structure (J^i_j, η_j, ξ^i) on M_{2n+1} is given by the following formulas:

$$N^h_j=\overset{\circ}{N}{}^h_j-X^h_j$$

$$F^h_{jk}=\overset{\circ}{F}{}^h_{jk}+\overset{\circ}{C}{}^h_{ja}X^a_k+\frac{1}{2}\{J^a_j[(J^h_a{}^{\circ}_{|k})+(J^h_a{}^{\circ}_{|b})X^b_k]-2\eta_j[(\xi^h{}^{\circ}_{|k})+(\xi^h{}^{\circ}_{|b})X^b_k]+$$

$$+\xi^h[(\eta_j{}^{\circ}_{|k})+(\eta_j{}^{\circ}_{|b})X^b_k+\eta_j\xi^h\eta_a[(\xi^a{}^{\circ}_{|k})+(\xi^a{}^{\circ}_{|b})X^b_k]\}+(\Phi^{ah}_{jb}-\Theta^{ah}_{jb})Y^b_{ak} \qquad (3.12)$$

$$C^h_{jk}=\overset{\circ}{C}{}^h_{jk}+\frac{1}{2}\{J^a_j(J^h_a{}^{\circ}_{|k})-2\eta_j(\xi^h{}^{\circ}_{|k})+\xi^h(\eta_j{}^{\circ}_{|k})+\eta_j\xi^h\eta_a(\xi^a{}^{\circ}_{|k})\}+$$

$$+(\Phi^{ah}_{jb}-\Theta^{ah}_{jb})Z^b_{ak}$$

where $F\overset{\circ}{\Gamma}=(\overset{\circ}{N}, \overset{\circ}{F}, \overset{\circ}{C})$ is a fixed Finsler connection on M_{2n+1}, $\overset{\circ}{|}$ and $\overset{\circ}{|}$ the covariant h-derivate and the covariant v-derivate with respect to this connection, and X^i_j, Y^i_{jk}, Z^i_{jk} are arbitrary Finsler tensors.

Following consequences are easily motivated:

Corollary 3.2. If $F\overset{\circ}{\Gamma}=(\overset{\circ}{N}, \overset{\circ}{F}, \overset{\circ}{C})$ is a fixed almost contact Finsler connection, then all the almost contact Finsler connections are given by:

$$N^h_j=\overset{\circ}{N}{}^h_j-X^h_j$$

$$F^h_{jk}=\overset{\circ}{F}{}^h_{jk}+\overset{\circ}{C}{}^h_{ja}X^a_k+(\Phi^{ah}_{jb}-\Theta^{ah}_{jb})Y^b_{ak} \qquad (3.13)$$

$$C^h_{jk}=\overset{\circ}{C}{}^h_{jk}+(\Phi^{ah}_{jb}-\Theta^{ah}_{jb})Z^b_{ak}$$

where X^h_j, Y^h_{jk}, Z^h_{jk} are arbitrary Finsler tensors.

Corollary 3.3. If $F\overset{\circ}{\Gamma}=(\overset{\circ}{N}, \overset{\circ}{F}, \overset{\circ}{C})$ is an arbitrary Finsler connection on M_{2n+1}, then the following Finsler Connection is an almost Finsler connection:

$$N^h_j=\overset{\circ}{N}{}^h_j$$

$$F^h_{jk}=\overset{\circ}{F}{}^h_{jk}+\frac{1}{2}\{J^a_j(J^h_a{}^{\circ}_{|k})-2\eta_j(\xi^h{}^{\circ}_{|k})+\xi^h(\eta_j{}^{\circ}_{|k})+\eta_j\xi^h\eta_a(\xi^a{}^{\circ}_{|k})\} \qquad (3.14)$$

$$C^h_{jk}=\overset{\circ}{C}{}^h_{jk}+\frac{1}{2}\{J^a_j(J^h_a{}^{\circ}_{|k})-2\eta_j(\xi^h{}^{\circ}_{|k})+\xi^h(\eta_j{}^{\circ}_{|k})+\eta_j\xi^h\eta_a(\xi^a{}^{\circ}_{|k})\}$$

Proof. From (3.12) for $X=0$, $Y=0$, $Z=0$ is obtained (3.14) or by a direct calculus we can verify the fulfilling of equations (3.1) and (3.2).

We will call the connections (3.14), as in the metric case [7] and in the conform metric case [4], the „Kawaguchi almost contact connections". From the connections (3.13) we can retain those who keep the nonlinear connection $\overset{\circ}{N}$, and we denote these connections by $F\Gamma(\overset{\circ}{N})$.

Corollary 3.4. If $F\overset{\circ}{\Gamma}=(\overset{\circ}{N}, \overset{\circ}{F}, \overset{\circ}{C})$ is a fixed almost contact Finsler connection, then all almost contact Finsler connections $F\Gamma(\overset{\circ}{N})$ are given by :

$$N^h_j=\overset{\circ}{N}{}^h_j$$

$$F^h_{jk}=\overset{\circ}{F}{}^h_{jk}+(\Phi^{ah}_{jb}-\Theta^{ah}_{jb})\ Y^b_{ak} \tag{3.15}$$

$$C^h_{jk}=\overset{\circ}{C}{}^h_{jk}+(\Phi^{ah}_{jb}-\Theta^{ah}_{jb})\ Z^b_{ak}$$

where Y^h_{jk}, Z^h_{jk} are arbitrary Finsler tensor fields.

4. Let R^i_{jk}, P^i_{jk}, S^i_{jk}, T^i_{jk}, C^i_{jk} be the torsion tensors (1.5) and R^i_{jkl}, P^i_{jkl}, S^i_{jkl} the curvature tensors of a Finsler connection on M_{2n+1}. Then from the Ricci identities (1.4) applied to J^i_j, η_j and ξ^i we have for an almost contact Finsler connection $F\Gamma=(N, F, C)$ the following relations :

$$J^i_a R^a_{jkl}-J^a_j R^i_{akl}=0\ ;\ \eta_a R^a_{jkl}=0\ ;\ \xi^a R^i_{akl}=0 \tag{4.1}$$

and the analogues in P^i_{jkl} and S^i_{jkl}.

So we have evidently :

Proposition 4.1. For every almost contact Finsler connection $F\Gamma=(N, F, C)$ the Oproiu operators (2.3) are covariant constant.

Considering (4.1), its analogues and using (2.3) and the proposition 4.1 we can state :

Theorem 4.2. The curvature tensor fields R^i_{jkl}, P^i_{jkl}, S^i_{jkl} of an almost contact Finsler connection satisfy the relations :

$$\Psi^{ah}_{jb}R^b_{akl}=0\ ;\ \Psi^{ah}_{jb}R^b_{akl\,|\,l_1\,|\,\ldots\,|\,l_p}=0\ ;\ \Psi^{ah}_{jb}R^b_{akl\,|\,l_1\ldots\,|\,l_q}=0 \tag{4.2}$$

$$\Psi^{ah}_{jb}P^b_{akl}=0\ ;\ \Psi^{ah}_{jb}P^b_{akl\,|\,l_1\,|\,\ldots\,|\,l_p}=0\ ;\ \Psi^{ah}_{jb}P^b_{akl\,|\,l_1\,|\,\ldots\,|\,l_p}=0 \tag{4.3}$$

$$\Psi^{ah}_{jb}S^b_{akl}=0\ ;\ \Psi^{ah}_{jb}S^b_{akl\,|\,l_1\,|\,\ldots\,|\,l_p}=0\ ;\ \Psi^{ah}_{jb}S^b_{akl\,|\,l_1\,|\,\ldots\,|\,l_p}=0\ \ (p=1, 2, \ldots) \tag{4.4}$$

$$\Theta^{ah}_{jb}R^b_{akl}=0\ ;\ \Theta^{ah}_{jb}R^b_{akl\,|\,l_1\,|\,\ldots\,|\,l_p}=0\ ;\ \Theta^{ah}_{jb}R^b_{akl\,|\,l_1\,|\,\ldots\,|\,l_q}=0\ \ (p=1, 2, \ldots) \tag{4.5}$$

$$\Theta^{ah}_{jb}P^b_{akl}=0\ ;\ \Theta^{ah}_{jb}P^b_{akl\,|\,l_1\,|\,\ldots\,|\,l_p}=0\ ;\ \Theta^{ah}_{jb}P^b_{akl\,|\,l_1\,|\,\ldots\,|\,l_p}=0\ \ (p=1, 2, \ldots) \tag{4.6}$$

$$\Theta^{ah}_{jb}S^b_{akl}=0\ ;\ \Theta^{ah}_{jb}S^b_{akl\,|\,l_1\,|\,\ldots\,|\,l_p}=0\ ;\ \Theta^{ah}_{jb}P^b_{akl\,|\,l_1\,|\,\ldots\,|\,l_p}=0\ \ (p=1, 2, \ldots) \tag{4.7}$$

Finally, from (2.4), (2.5) and theoreme 4.2 we have :

Theorem 4.3. The curvature tensor fields R^i_{jkl}, P^i_{jkl}, S^i_{jkl} of an almost contact Finsler connection satisfy the realations :

$$\underset{2}{Q^{ah}_{jb}}R^b_{akl}=0\ ;\ \underset{2}{Q^{ah}_{jb}}R^b_{akl\,|\,l_1\,|\,\ldots\,|\,l_p}=0\ ;\ \underset{2}{Q^{ah}_{jb}}R^b_{akl\,|\,l_1\,|\,\ldots\,|\,l_p}=0\ \ (p=1, 2) \tag{4.8}$$

$$\underset{2}{Q^{ah}_{jb}}P^b_{akl}=0\ ;\ \underset{2}{Q^{ah}_{jb}}P^b_{akl\,|\,l_1\,|\,\ldots\,|\,l_p}=0\ ;\ \underset{2}{Q^{ah}_{jb}}P^b_{akl\,|\,l_1\,|\,\ldots\,|\,l_p}=0\ \ (p=1, 2, \ldots) \tag{4.9}$$

$$\underset{2}{Q^{ah}_{jb}}S^a_{bkl}=0\ ;\ \underset{2}{Q^{ah}_{jb}}S^b_{akl\,|\,l_1\,|\,\ldots\,|\,l_p}=0\ ;\ \underset{2}{Q^{ah}_{jb}}S^b_{akl\,|\,l_1\,|\,\ldots\,|\,l_p}=0\ \ (p=1, 2, \ldots) \tag{4.10}$$

[1] Gh. Atanasiu: Sur les couples de connexions compatibles aux structures presque de contact. Rev. Roum. Math. Pur. App. 1977, 22, p. 427—436.
[2] J. Bouzon: Structures presque cocomplexes. Rend. Sem. Mat. Torino, 1964—65, 24, p. 53—124.
[3] M. Hashiguchi, Wagner connections and Miron connections. Symp. of Finsler Geom. at Hakone, Japan, 3—5 oct 1979.
[4] M. Hashiguchi, R. Miron, Conformal Finsler connections. Rep. Fac. Sci. Kagoshima Univ., 1980.
[5] C. J. Hsu, Note on (φ, ξ, η)-structure, Tohoku Math. J. 1961, 13, p. 434—442.
[6] M. Matsumoto, The Theory of Finsler Connections, Publ. of the Study Group of Geometry, 5, Okayama Univ. Japan, 1970.
[7] R. Miron, M. Hashiguchi, Metrical Finsler Connections. Rep. Fac. Sci. Kagoshima Univ. (Math., Phys., Chem.), 12, 1979.
[8] M. Obata, Affine connections on manifolds with almost complex, quaternion or hermitian structure. Jap. J. Math., 1956, 26, p. 43—77.
[9] V. Oproiu, Some remarks on the almost cocomplex connections. Rev. Roum. Math. Pures et Appl., 1971, 16, p. 383—393.
[10] S. Sasaki, Y. Hatakeyama, On differentiabile manifolds with certaine structures closely related to contact structures. Tohoku Math. J., 1960, 12, p. 459—472 ; 1961. 13. p, 281—294.

Department of Geometry
Faculty of Mathematics and Informatics
University of Braşov

Department of Mathematics
„Traian Vuia" Polytechnic Institute Timişoara

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara

Tom 26 (40) **Fascicola 1—1981**

SERIA MATEMATICĂ-FIZICĂ

ON A FAMILY OF NEW CONTRACTIVE TYPE MAPPINGS IN METRIC SPACES

BY

B. G. PACHPATTE

Primită la redacţie 3 III 80

Theorem 1. *Let* $\{T_n : n \in I^+\}$ *be a sequence of self mappings of a complete metric space* (X, d) *into itself such that for all* $x, y \in X$ *and every pair* i, j *wiht* $i \neq j$,

$$(1) \quad d(T_i(x), T_j(y)) \leqslant q \max\left\{ \frac{d(x, T_j(y))\,[1+d(x, T_i(x))+d(y, T_i(x)]}{2\,[1+d(x, y)]}, \right.$$

$$\left. \frac{d(y, T_i(x))\,[1+d(y, T_j(y))+d(x, T_j(y))]}{2\,[1+d(x, y)]} \right\}$$

where $q \in (0, 1)$. *Then the sequence of mappings* $\{T_n\}$ *has a unique common fixed point.*

Proof. Let x_0 be an arbitrary point in X and define a sequence

$$x_1 = T_i(x_0),\ x_2 = T_j(x_1),\ \ldots,\ x_{2n} = T_j(x_{2n-1}),\ x_{2n+1} = T_i(x_{2n}) \ldots .$$

Then by (1) we have

$$d(x_1, x_2) = d(T_i(x_0), T_j(x_1))$$

$$\leqslant q \max\left\{ \frac{d(x_0, x_2)\,[1+d(x_0, x_1)+d(x_1, x_1)]}{2\,[1+d(x_0, x_1)]}, \right.$$

$$\left. \frac{d(x_1, x_1)\,[1+d(x_1, x_2)+d(x_0, x_2)]}{2\,[1+d(x_0, x_1)]} \right\}$$

$$= q \max\left\{ \frac{1}{2} d(x_0, x_2),\ 0 \right\},$$

which implies

$$d(x_1, x_2) \leqslant \frac{q}{2-q} d(x_0, x_1) \leqslant q d(x_0, x_1).$$

Similarly we have

$$d(x_2, x_3) \leqslant q d(x_1, x_2).$$

Repeating the above argument we obtain

$$d(x_n, x_{n+1}) \leqslant q d(x_{n-1}, x_n) \leqslant \ldots \leqslant q^n d(x_0, x_1),$$

which implies that the sequence $\{x_n\}$ is a Cauchy sequence. Hence by the completeness of X, $\{x_n\}$ converges to some point z in X.

By (1) we have

$$d(u, T_i(u)) \leqslant d(u, x_{2n}) + d(T_j(x_{2n-1}), T_i(u))$$

$$\leqslant d(u, x_{2n}) + q \max \left\{ \frac{d(u, x_{2n})[1 + d(u, T_i(u)) + d(x_{2n-1}, T_i(u))]}{2[1 + d(u, x_{2n-1})]}, \right.$$

$$\left. \frac{d(x_{2n-1}, T_i(u))[1 + d(x_{2n-1}, x_{2n}) + d(u, x_{2n})]}{2[1 + d(u, x_{2n-1})]} \right\}.$$

From the above inequality we observe that $d(u, T_i(u))$ tends to zero as n tends to infinity, and hence we obtain $T_i(u) = u$. Similary $T_j(u) = u$, i.e. u is a common fixed point of T_i and T_j.

For uniqueness, assume z' is also a fixed point of T_i and T_j. Then, from (1)

$$d(u, v) = d(T_i(u), T_j(v)) \leqslant q \max \left\{ \frac{1}{2} d(u, v), \frac{1}{2} d(u, v) \right\},$$

which implies $d(u, v) = 0$, i.e. $u = v$. Therefore T_i and T_j have a unique common fixed point

Let u, v be common fixed points of T_i, T_j and T_k, T_l respectively. To prove $u = v$, we may suppose $i \neq k$ and $T_j(u) = T_l(v) = b$. By (1) we have

$$d(u, v) = d(T_j(u), T_e(v)) = d(T_l(v), T_j(u)) \leqslant q \max \left\{ \frac{1}{2} d(u, v), \right.$$

$$\left. \frac{1}{2} d(u, v) \right\},$$

which implies $u = v$. This shows that the fixed points of every pair T_i, T_j coincide. Hence u is a unique common fixed point of the sequence of mappings $\{T_n\}$ and the proof of the theorem is complete.

We next establish the following common fixed point theorem indicated by M. G. Maia's fixed point theorem given in [5].

Theorem 2. *Let X be a metric space with two metrices d and δ. If X satisfies*

(i) $d(x, y) \leqslant \delta(x, y)$ *for all x, y in X,*

(ii) *X is complete with respect to d,*

(iii) *two mappings $S, T : X \to X$ are continuous with respect to d, and*

$$(2) \qquad \delta(S(x), T(y)) \leqslant q \max \left\{ \frac{\delta(x, T(y))[1 + \delta(x, S(x)) + \delta(y, S(x))]}{2[1 + \delta(x, y)]}, \right.$$

$$\left. \frac{\delta(x, S(x))[1 + \delta(y, T(y)) + \delta(x, T(y))]}{2[1 + \delta(x, y)]} \right\},$$

for all x, y in X and $q \in (0,1)$, then S and T have a unique common fixed point.

The proof of this theorem follows by an argument similar to that given by Iseki in [3] in view of the proof of Theorem 1, we omit the details.

We now apply Theorem 1 to establish the following common fixed point theorems for a family of self mappings of X.

Theorem 3. *Let* $\{T_n : n \in I^+\}$ *be a sequence of self mappings of a complete imetric space* (X, d) *into itself. Suppose that there is a sequence of nonnegative ntegers* $\{m_n\}$ *such that for all* x, y *in* X *and every pair* i, j *with* $i \neq j$,

$$(3) \quad \mathrm{d}(T_i^{m_i}(x),\ T_j^{m_j}(y)) \leqslant q \max \left\{ \frac{\mathrm{d}(x, T_j^{m_j}(y))\,[1+\mathrm{d}(x, T_i^{m_i}(x))+\mathrm{d}(y, T_i^{m_i}(x))]}{2\,[1+\mathrm{d}(x, y)]}, \right.$$

$$\left. \frac{\mathrm{d}(y, T_i^{m_i}(x))\,[1+\mathrm{d}(y, T_j^{m_j}(y))+\mathrm{d}(x, T_j^{m_j}(y))]}{2\,[1+\mathrm{d}(x, y)]} \right\},$$

where $q \in (0, 1)$. *Then the sequence of mappings* $\{T_n\}$ *has a unique common fixed point.*

The details of the proof of this theorem follows by letting $U_i = T_i^{m_i}$ in (3) and applying Theorem 1 (see, [3, Theorem 1]). We omit the details.

Theorem 4. *Let* T_i $(i=1, 2, \ldots, k)$ *be a finite family of mappings of a complete metric space* (X, d) *into itself. Suppose that*

(i) $T_iT_j = T_jT_i$ $(i, j=1, 2, \ldots, k)$,

(ii) *there are two systems of positive integers* $\{m_1, \ldots, m_k\}$ *and* $\{n_1, \ldots, n_k\}$ *such that for all* x, $y \in X$,

$$(4) \quad \mathrm{d}(T_1^{m_1} \ldots T_k^{m_k}(x),\ T_1^{n_1} \ldots T_k^{n_k}(y))$$

$$\leqslant q \max \left\{ \frac{\mathrm{d}(x, T_1^{n_1} \ldots T_k^{n_k}(y))\,[1+\mathrm{d}(x, T_1^{m_1} \ldots T_k^{m_k}(x))+\mathrm{d}(y,\ T_1^{m_1} \ldots T_k^{m_k}(x))]}{2\,[1+\mathrm{d}(x, y)]}, \right.$$

$$\left. \frac{\mathrm{d}(y, T_1^{m_1} \ldots T_k^{m_k}(x))\,[1+\mathrm{d}(y, T_1^{n_1} \ldots T_k^{n_k}(y))+\mathrm{d}(x, T_1^{m_1} \ldots T_k^{m_k}(y))]}{2[1+\mathrm{d}(x,\ y)]} \right\}$$

where $q \in (0, 1)$. *Then* T_i $(i=1, 2, \ldots, k)$ *have a unique common fixed point.*

The proof of this theorem follows by setting $U = T_1^{m_1} \ldots T_k^{m_k}$ and $V = T_1^{n_1} \ldots T_k^{n_k}$ in (4) and using a suitable version of Theorem 1 (see, [3, Theorem 2]).

In [3], Iseki has proved some interesting generalizations of M. G. Maia's fixed point theorem [5] satisfying a more general contractive type condition. We note that as an application of Theorem 2 we can very easliy establish the variants of Theorems 3 and 4 in the framework of Maia's fixed point theorem [5]. We omit the details.

REFERENCES

1. Lj. B. Ćirić, On a family of contractive maps and fixed points, *Publ. Inst.Math.* 17 (1974), 45—51.
2. B. Fisher, Common fixed point and constant mappings satisfying a rational inequality, *Math. Seminar Notes, Kobe Univ.* 6 (1968), 29—35.
3. K. Iseki, Fixed point theorems in complete metric spaces, *Math. Seminar Notes, Kobe Univ*, 2 (1974), 1—6.

4. K. Kasahara, On some common fixed point theorems for contractive mappings *Math. Seminar Notes, Kobe Univ.* 6 (1978), 57—75.

5. M. G. Maia, Un'osservazione sulle contrazions metriche, *Rend. Sem. Math. Padova* 40 (1968), 139—143.

6. B. G. Pachpatte. Generalized contraction mappings and common fixed point theorems, *Proc. Nat. Acad. Sci., India* 46 (A) (1976), 76—80.

7. B. G. Pachpatte, On some common fixed point theorems in metric spaces, *Math. Vesnik* 14 (1977), 289—293.

8. B. G. Pachpatte, Generalized contraction mappings and fixed point theorems, *Bull. Math. Soc. Sci. Math. R. S. Roumanie* 21 (1977), 375—380.

9. B. G. Pachpatte, Fixed point theorems for contraction type mappings on a 2-metric space, *Proc. Nat. Acad. Sci., India* 48 (A) (1978), 94—102.

10. B. E. Rhoades, A comparison of various definitions of contractive mappings, *Trans. Amer. Math. Soc.* 226 (1977), 257—290.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara

Tom 26 (40) **Fascicola 1—1981**

SERIA MATEMATICĂ-FIZICĂ

ASUPRA RESTULUI ÎN CALCULUL NUMERIC AL UNOR INTEGRALE DUBLE

DE

ST. MATEI

Primită la redacţie 14 III 80

1. Introducere

În cele ce urmează ne propunem să calculăm valoarea numerică şi restul pentru unele integrale duble pe domenii plane particulare folosind metoda operatorilor diferenţiali parţiali.

În general pentru calculul integralei multiple :

$$\int_{Dr} U(x_\rho)\, dV,\quad dV = dx_1 dx_2 \ldots dx_n, \tag{1}$$

$u(x_\rho)$ fiind de $(N+1)$ ori diferenţiabilă în domeniul n dimensional D_r, folosind dezvoltarea în serie Taylor vom obţine :

$$\int_{Dr} u(x_\rho)\, dV = u(x_{\rho_1}) \int_{Dr} dV + \frac{1}{2!} \sum_{\sigma=0}^{r} \frac{\partial^2 u(x_{\rho 1})}{\partial x^2 \tau} \cdot \int_{Dr} (x_\sigma - x_{\sigma_1})\, dV \cdot \tag{2}$$

Vom folosi pentru funcţiile de două variabile $u(x, y)$ de $(N+1)$ ori diferenţiabile în $D_r \subset R^2$ notaţiile :

$$u_{p\rho} = \frac{\partial^{p+\rho} u}{\partial x^p \partial y^\rho}\ ;\ \bar{u}_{p\rho} = u_{p\rho}(0,0) \tag{3}$$

$$\Delta^n = \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^n\right]. \tag{4}$$

În cazul în care D_r este cercul $x^2+y^2=h^2$, în care $u(x, y)$ este de $(2N+1)$ ori diferenţiabilă, făcînd transformarea în coordonate polare r, φ şi ţinînd seama de valoarea integralei :

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2p}\varphi \sin^{2q}\varphi = \frac{\pi}{2^{2p+2q-1}} \cdot \frac{(2p)!\,(2q)!}{p!\,(p+q)!\,q!};\quad p, q = 0, 1, 2 \tag{5}$$

obţinem :

$$\frac{1}{h^2\pi} \iint_{Dr} u(x, y)\, dx dy = \sum_{n=0}^{N} \frac{\left(\frac{h}{2}\right)^{2n}}{n!\,(n+1)!} \Delta^n \bar{u} + R^* = \tag{6}$$

$$= \bar{u} + \frac{h^2}{8}\Delta\bar{u} + \frac{h^4}{192}\Delta^2\bar{u} + \ldots + R^*$$

în care restul R^* este de ordinul $(2N+1)$.

Pentru calculul numeric al integralelor duble pe diferite domenii plane și aflarea restului vom mai folosi următorii operatori de diferențiere parțială :

$$\Delta_{2K}^{n-K}\tilde{u}=\sum_{p=0}^{n}\binom{2n}{2p}_{2K}U_{2n-2p,2p} \text{ în care : } \binom{2n}{2p}_{2K}=\sum_{q=-p}^{+p}(-1)^q\binom{n+k}{p+q}\binom{n-k}{p-q};$$

(7) $\quad k=0, 1, 2, \ldots \qquad n=k, k+1, k+2, \ldots \qquad p=0, 1, 2, \ldots, n;$

Cneficienții $\binom{2n}{2d}_{2K}$ au nrmătoarele expresii :

(8) $$\text{a)} \quad n=K \binom{2k}{2p}_{2K}=(-1)^p\binom{2k}{2p}$$

$$\text{b)} \quad n>K \binom{2n}{2p}_{2K}=\binom{2(n-1)}{2p}_{2K}+\binom{2(n-1)}{2(p-1)}_{2K}$$

$$\text{c)} \quad p\to n-p \binom{2n}{2p}_{2K}=(-1)^K\binom{2n}{2n-2k}_{2K}$$

Dînd lui k valorile 0, 1, 2, 3, ... vom găsi pentru cele trei cazuri valor particulare pentru $\Delta_{2K}^{n-K}u$.

Pentru poligoanele regulate coordonatele în colțuri le vom nota cu

$$x_\mu=h\cos\frac{2\pi\mu}{m}, \quad y_\mu=h\sin\frac{2\pi\mu}{m}; \quad \mu=1,\overline{m}; \quad m\geqslant 3$$

și vom folosi următoarele ssume de aproximare

(9) $$S_m(h)=\sum_{\mu=1}^{m}u\left(h\cos\frac{2\pi\mu}{m}, \; h\sin\frac{2\pi\mu}{m}\right);$$

(10) $$S_{2m}(h)=2m\left[\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{h}{2}\right)^{2n}\frac{1}{n!\,n!}\Delta_0^n\tilde{u}+2\sum_{l=1}^{L^*}\sum_{n=lm}^{N}\left(\frac{h}{2}\right)^{2n}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\frac{1}{(n+lm)!\,(n-lm)!}\Delta_{2lm}^{n-lm}\tilde{u}\right]+R^*=2m\left[\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{h}{2}\right)^{2n}\sum_{p=0}^{n}k_{1m,2n-2p,2p}\tilde{u}_{2n-2p,2p}+\right.$$

$$R^*; \text{ cu } k_{2m\,2n-2p,2p}=\sum_{l=-L}^{l=+L}\frac{1}{(n+lm)!\,(n-lm)!}\sum_{q=-p}^{+p}(-1)^q\binom{n+lm}{p+q}\binom{n-lm}{p-q}$$

$$n=0, 1, 2, \ldots N; \; L^*m\leqslant N\leqslant(L^*+1)m; \; Lm\leqslant n\leqslant(L+1)m;$$

$$L=0, L^*;$$

(11) $$E_4(h)=u(h,h)+u(-h,h)+u(-h,-h)+u(h,-h)$$

II. Calculul numeric al unor integrale duble și al restului

1. Domenii circulare

Folosind formulele (6) și (10) vom întocmi tabelul 1.

$x=0\ ;\ y=0$

	$\bar{u}$	$\frac{1}{2!}\left(\frac{h}{2}\right)^2\Delta^2\bar{u}$	$\frac{1}{4!}\left(\frac{h}{2}\right)^4\Delta^2\bar{u}$	$\frac{1}{2!}\left(\frac{h}{2}\right)^4\Delta_4^0\bar{u}$	$\frac{1}{6!}\left(\frac{h}{2}\right)^6\Delta^2\bar{u}$	$\frac{1}{6!}\left(\frac{h}{2}\right)^6\Delta_4^1\bar{u}$	$\frac{1}{6!}\left(\frac{h}{2}\right)^6\Delta_6^0\bar{v}$
$\frac{1}{h^2\pi}\iint_{Dr} u\,dx\,dy$	1	1	2	0	5	0	0
$\frac{1}{4}S_4(\sigma_4 h)$	1	$2\,\sigma_2^4$	$6\,\sigma_4^4$	$2\,\sigma_4^4$	$20\,\sigma_6^6$	$12\,\sigma_4^6$	0
$\frac{1}{4}E_4(\varepsilon_4 h)$	1	$4\,\varepsilon_4^4$	$24\,\varepsilon_4^4$	$-8\,\varepsilon_4^4$	$160\,\varepsilon_4^6$	$-96\,\varepsilon_4^6$	0
$\frac{1}{6}S_6(\tau_6 h)$	1	$2\,\sigma_6^2$	$6\,\sigma_6^4$	0	$20\,\sigma_6^6$	0	$2\,\sigma_6^6$

Cu ajutorul tabelului 1 putem calcula integrala (6) folosind formula :

$$(12)\qquad \frac{1}{h^2\pi}\iint_{Dr} u(x,y)\,dx\,dy = m_0M_0 + s_4S_4(\sigma_4 h) + e_4E_4(\varepsilon_4 h) + s_6S_6(\sigma_6 h) + R^*$$

în care m_0, s_4, e_4, s_6 sînt parametri de pondere pentru M_0, S_4, E_4, S_6 iar σ_4, ε_4, σ_6 sînt parametri de distanță care depind de nodurile rețelei [1].

De exemplu dacă rețeaua are forma a) atunci :

a) $\quad m_0=\frac{4}{24}\ ;\ \sigma_4=1\ ;\ s_4=\frac{1}{24}\ ;\ \varepsilon_4=\frac{1}{2}\ ;\ l_4=\frac{4}{24}\ ;\ \sigma_6=0\ ;\ s_6=0.$

Valoarea integralei în acest caz este :

$$(13)\qquad \frac{1}{h^2\pi}\iint_{Dr} u(x,y)\,dx\,dy = \frac{1}{360}\left[40M_0+(16+\sqrt{6})\,S_{10}\left(\sqrt{\frac{6-\sqrt{6}}{10}}\,h\right)+\right.$$

$$\left.+(16-\sqrt{6})\,S_{10}\left(\sqrt{\frac{6+\sqrt{6}}{10}}\,h\right)\right]+\ldots$$

cu restul :

$$(14)\qquad R^* = -\frac{1}{6!}\left(\frac{h}{2}\right)^6\Delta_4^1\tilde{u}+\ldots$$

2. Domenii în formă de pătrat

În acest caz vom folosi formula :

$$(15)\qquad \frac{1}{4h^2}\int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h} u(x,y)\,dx\,dy - \{mM_0+sS_4(\sigma h)+eE_4(\varepsilon h)\} =$$

$$=\tilde{u}\,[1-4(e+s)+m]+\frac{h^2}{2!}\Delta\tilde{u}\left[\frac{1}{3}-4\left(\varepsilon^2 e+\frac{1}{2}\sigma^2 s\right)\right]+\frac{h^4}{4!}\left\{\Delta^2\tilde{u}\left[\frac{7}{30}-6\left(\varepsilon^4 e+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\frac{1}{4}\sigma^4 s\right)\right]-\Delta_4^0\tilde{u}\left[\frac{1}{30}-2\left(\varepsilon^4 e-\frac{1}{4}\sigma^4 s\right)\right]\right\}+\frac{h^6}{6!}\left\{\Delta^3\tilde{u}\left[\frac{3}{14}-10\left(\varepsilon^6 e+\frac{1}{8}\sigma^6 s\right)\right]-\right.$$

$$\left.-\Delta_4^1\tilde{u}\left[\frac{1}{14}-6\left(\varepsilon^6 e-\frac{1}{8}\sigma^6 s\right)\right]\right\}+\ldots$$

De exemplu dacă rețeaua are forma b) atunci :

b) $$\varepsilon=\sqrt{\frac{3}{5}};\ e=\frac{25}{324};\ \sigma=\sqrt{\frac{3}{5}};\ s=\frac{40}{324};\ m=\frac{64}{324};$$

cu restul :

(16) $$R^*=\frac{4}{175}\frac{h^6}{6!}\{u_{60}+u_{06}\}+\ldots$$

3. Domenii triunghiulare

Vom folosi tabelul 2

	$\bar{u}$	$\frac{1}{2!}\left(\frac{h}{2}\right)^2\Delta\bar{u}$	$\frac{1}{3!}\left(\frac{h}{2}\right)^3\Delta_3^0\bar{u}$	$\frac{1}{4!}\left(\frac{h}{2}\right)^4\Delta^2\bar{u}$	$\frac{1}{5!}\left(\frac{h}{2}\right)^5\Delta_3^1\bar{u}$	$\frac{1}{6!}\left(\frac{h}{2}\right)^6\Delta^3\bar{u}$	$\frac{1}{6!}\left(\frac{h}{2}\right)^6\Delta_6^0\bar{u}$
$\frac{1}{3/4\sqrt{3}h^2}\iint_{P_3} u\,dxdy$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	3/5	$\frac{4}{7}$	$\frac{29}{28}$	$\frac{1}{14}$
$\frac{1}{3}S_3(\varepsilon h)$	1	$2\,\varepsilon^2$	$2\,\varepsilon^3$	$6\,\varepsilon^4$	$10\,\varepsilon^5$	$20\,\varepsilon^6$	$2\,\varepsilon^6$
$1/3\,S_3(-\sigma h)$	1	$2\,\sigma^2$	$-2\,\sigma^3$	$6\,\sigma^4$	$-10\,\sigma^5$	$20\,\sigma^6$	$2\,\sigma^6$

și formula de calcul a integralei duble :

(17) $$\frac{1}{3/4\sqrt{3}h^2}\iint_{P_3} u(x,y)\,dxdy=mM_0+sS_3(-\sigma h)+eS_3(\varepsilon h)+R^*$$

Dacă rețeaua are forma din c) atunci :

$$m=\frac{270}{1\,200};\ \varepsilon=\frac{\sqrt{15}+1}{7};\ e=\frac{155-\sqrt{15}}{1\,200};\ \sigma=\frac{\sqrt{15}-1}{7};\ s=\frac{155+\sqrt{15}}{1\,200}$$

(18) $$R^*=\frac{9}{980}\frac{1}{6!}\left(\frac{h}{2}\right)^6\{15\Delta^3\bar{u}-2\Delta_6^0\bar{u}\}+\ldots$$

4. Domenii hexagonale

În acest caz integralele duble le vom calcula cu formula :

(19) $$\frac{1}{3/2\sqrt{3}h^2}\iint_{P_6} u(x,y)\,dxdy-\{mM_0+sS_6(\sigma h)\}=\{1-6s-m)\,\bar{u}+$$

$$+\left\{\left\{\frac{5}{6}-12\sigma^2 s\right\}\frac{1}{2!}\left(\frac{h}{2^2}\right)^2\right\}\Delta\bar{u}+\left\{\frac{7}{5}-36\sigma^4 s\right\}\frac{1}{4!}\left(\frac{h}{2^4}\right)^4\Delta^2\bar{u}+\ldots$$

Dacă rețeaua are forma din figura d) atunci :

d) $$\sigma=\frac{1}{5}\sqrt{14};\ s=\frac{25}{1008}\ m=\frac{258}{1\,008};$$

(20) $$R^*=\frac{1}{10\cdot 500}\frac{1}{6!}\left(\frac{h}{2}\right)^6\{3\,685\Delta^3\bar{u}-1\,994\Delta_6^2\bar{u}\}+\ldots$$

III. Restul pentru integralele duble pe domenii dreptunghiulare

1. *Metoda lui Simpson*

Utilizînd metoda lui Simpson prezentată în [2] vom obține pentru restul integralelor duble pe domenii dreptunghiulare formula :

$$(21)\qquad R_1(f)=\frac{(b-a)^5(d-c)}{2^5\cdot 90}\cdot\frac{\partial^4 f(\xi_1,\eta_1)}{\partial x^4}-\frac{(b-a)(d-c)^5}{2^5\cdot 90}\cdot\frac{\partial^4 f(\xi_2,\eta_2)}{\partial y^4}-$$

$$-\frac{(b-a)^5(d-c)^5}{2^{10}\cdot 90^2}\cdot\frac{\partial_z f(\xi_3,\eta_3)}{\partial^4 x\cdot\partial y^4};\ (a<\xi_1<b\ ;\ c<n_1<d).$$

2. *Metoda interpolării*

Pe baza rezultatelor obținute în [3] și [4] vom obține pentru rest o formulă mai bună ca (21) :

$$(22)\qquad R_2(f)=\frac{(b-a)^5(d-e)}{24^3\cdot 5}\cdot\frac{\partial f(\xi_1,\eta_1)}{\partial x^4}+\frac{(b-a)(d-c)^3}{24^3\cdot 5}\cdot\frac{\partial^4 f(\xi_2,\eta_2)}{\partial y^4}-$$

$$-\frac{(b-a)^5(d-c)^5}{24^6\cdot 25}\cdot\frac{\partial f^8(\xi_3,\eta_3)}{\partial x^4\partial y^4};$$

Dacă pentru integrare vom lua :

$$x_0=\frac{a+b}{2}-\frac{b-a}{2\sqrt{3}},\ x_1=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2\sqrt{3}};\ y_0=\frac{c+d}{2}-\frac{d-c}{2\sqrt{3}};$$

$$y_1=\frac{c+d}{2}+\frac{d-c}{2\sqrt{3}}$$

vom obține următoarea formulă de cuadratură pe domenii dreptunghiulare :

$$(23)\qquad \int_a^b\int_a^b f(x,y)\,dxdy=\frac{(b-a)(d-c)}{4}[f(x_0,y_0)+f(x_0,y_1)+f(x_1,y_0)+$$

$$+f(x_1,y_1)]+\frac{(b-a)(d-c)}{4}R_2(f);$$

BIBLIOGRAFIE

[1] A. H. Stroud, Aproximate Calculation of Multiple Integrals (1971).

[2] Brice Carnahan, H. A. Luther, James O. Wilkes, Applied Numerical Methods.

[3] A. Angelescu, „Sur des polynomes generalisant les polynomes de Legendre et d'Hermite et sur le calcul approche des integrales multiples, Thesis Univ. of Paris 1916.

[5] St. Matei „Interpolarea funcțiilor de mai multe variabile cu ajutorul calculatoarelor numerice" (în curs de apariție în Bul. Șt. și Tehnic al I. P. „Traian Vuia" Timișoara Matematică-Fizică, Fascicola 2., 1978).

ÜBER DIE RESTBESTIMMUNG IN DER NUMERISCHEN BERECHNUNG EINIGER DOPPELLINTEGRALE

ZUSAMMENFASSUNG

In dieser Arbeit berechnet der Autor den Zahlenwert und bestimmt Ordnung und Gestalt des Restes für einige Doppellintegrale auf kreisförmigen, quadratischen, rechteckigen, dreieckförmigen und sechseckförmigen Gebieten, wobei die Methode der partiellen Differentialoperatoren, die Methode von Simpson und die Interpolationsmethode verwendet werden.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara
Tom 26 (40) Fascicola 1—1981
SERIA MATEMATICĂ-FIZICĂ

STRUCTURI DIFERENŢIABILE ŞI SPAŢII TANGENTE (I)

DE
RENDI BELA

Primită la redacţie 14 III 1980

În lucrarea de faţă vom face cîteva observaţii referitor la noţiunea de vector tangent şi spaţiu tangent. Considerăm cazul funcţiilor reale de o variabilă reală $F=\{f \mid f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\}$. Reamintim definiţia vectorului tangent la $\mathbb{R}$ în origine, $\mathbb{R}$ fiind privit ca varietate diferenţiabilă de clasă C^∞.

Definiţie. Se numeşte vector tangent în origine la $\mathbb{R}$, aplicaţia

$$X: C^\infty(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$$

care verifică

$$1^\circ \quad X(\lambda f+\mu g)=\lambda X(f)+\mu X(g)$$

$$2^\circ. \quad X(f\cdot g)=f(0)\cdot X(g)+g(0)\cdot X(f)$$

pentru orice $\lambda, \mu\in\mathbb{R}$ şi $f, g\in C^\infty(\mathbb{R})$

Se ştie că mulţimea vectorilor tangenţi la $\mathbb{R}$ în origine formează un spaţiu liniar 1-dimensional. Oricărui vector tangent X îi corespunde un scalar $\alpha\in R$ astfel încît $X(f)=\alpha\cdot f'(0)$, $\forall f\in C^\infty$.

O posibilitate de a generaliza noţiunea de vector tangent este înlocuirea algebrei C^∞ cu alte algebre de funcţii. Să considerăm de exemplu subalgebra funcţiilor analitice ce se anulează în origine.

$$\Omega_1=\{f \mid f(0)=0\}$$

unde Ω_0 este algebra funcţiilor analitice. Prin vector tangent în sensul algebrei Ω_1 la $\mathbb{R}$ în origine vom înţelege o aplicaţie

$$X:\Omega_1\to\mathbb{R}$$

care verifică 1° şi 2°.

Fie $u, v\in\Omega_1$, atunci avem

$$u(x)=a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots$$

$$v(x)=b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n\ldots$$

$$(u\cdot v)(x)=a_1b_1x^2+(a_1b_2+a_2b_1)x^3+\ldots$$

Dacă notăm $X(x^n)=\alpha_n$, atunci obţinem

$$X(u\cdot v)=\alpha_2a_1b_1+\alpha_3(a_1b_2+a_2b_1)+\ldots$$

Pe de altă parte $X(u\cdot v)=u(0)\cdot X(v)+v(0)\cdot X(u)=0$.

Alegem u, v în mod convenabil şi deducem

$$0=\alpha_2=\alpha_3=\ldots=\alpha_n=\ldots$$

Astfel α_1 — arbitrar fiind, avem un spațiu tangent unidimensional.

Considerăm în continuare subalgebra funcțiilor analitice

$$\Omega_2=\{f : f(0)=f'(0)=0\} \qquad \Omega_0$$

Pentru $u, v \in \Omega_2$ avem

$$u(x)=a_2x^2+a_3x^3+\ldots$$

$$v(x)+b_2x^2+b_3x^3+\ldots$$

$$(u\cdot v)(x)=a_2b_2x^4+\ldots$$

$$X(u\cdot v)=a_2b_2\alpha_4+\ldots$$

dar $X(u\cdot v)=0=u(0)\cdot X(v)+v(0)\cdot X(u)$, astfel avem

$$0=\alpha_4=\alpha_5=\ldots$$

Deci α_2, α_3 sînt constante arbitrare și astfel spațiul tangent în origine este bidimensional.

În general dacă luăm

$$\Omega_k=\{f \mid f(0)=f'(0)=\ldots=f^{(k-1)}(0)=0\} \subset \Omega_0$$

atunci vom obține spațiul tangent k-dimensional în origine.

Observații 1) Dacă considerăm subalgebre de forma

$$\Omega_1^{(k)}=\left\{f(x)=\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^{k_i}\right\} \subset \Omega_0$$

atunci obținem spații tangente 1-dimensionale pentru orice $k \in N$.

2) Dacă considerăm ideale $m \subset \Omega_0$ și luăm algebrele factor $F=\Omega_{0/m}$ atunci putem considera $X : F \to R$ verificînd 1°, 2° în calitate de vector tangent. De exemplu dacă considerăm idealele $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_k$ obținem algebrele factor $F_1, F_2, \ldots, F_k$. Cu ajutorul algebrei F_1 obținem spațiul tangent 0-dimensional (format din aplicația identic nulă). Cu ajutorul lui $F_2, F_3, \ldots, F_k$ obținem spații tangente 1-dimensionale.

3) Să cosiderăm acum spațiile tangente în origine în sensul algebrelor Ω_2 și Ω_3, fie notate prin T_2 și T_3. Avem incluziunea $\Omega_3 \subset \Omega_2$. Se pune problema determinării subspațiului lui T_3 generat de elementele lui T_2 prin restricție, adică dacă T_2 nu se scufundă în T_3 prin restricție.

Fie X_2, X_3 baza lui T_2, definită prin

$$X_1(x^2)=1,\ X_2(x^3)=1,\ X_3(x^2)=X_3(x^{3+\alpha})=X_2(x^{2+\alpha})=0\ ;\ \alpha \geqslant 1$$

De asemenea fie Y_3, Y_4, Y_5 baza lui T_3 definită prin

$$Y_3(x^3)=Y_4(x^4)=Y_5(x^5)=1$$

$$Y_3(x)=Y_4(x)=Y_5(x)=0 \text{ pentru } \alpha \neq 3,\ \beta \neq 4,\ \gamma \neq 5$$

Se constată că $X_2 \mid_{\Omega_3}=0$, iar $X_3 \mid_{\Omega_3}=Y_3$. Astfel T_2 nu se scufundă în T_3, T_2 și T_3 avînd în comun un subspațiu unidimensional. Cu toate că $\Omega_k \subset \subset \Omega_m$, $k > m$ avem că $T_m \not\subset T_k$. Avem din $(T_m \cap T_k)=2m-k$.

4) Dacă am dori să lărgim algebra de funcții, de exemplu dacă am considera algebra C° a funcțiilor reale continue atunci am obține

$X : C^\circ \to \mathbb{R}$ verifică 1° și 2° dacă și numai dacă $X \equiv 0$.

În general vom considera o algebră de funcții

$$A \subset \mathcal{F} = \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\},$$

Se notează prin $T_{A,x}$ spațiul tangent definit cu această algebră în x_0.

$$T_A x_0 = \{X \mid X : A \to \mathbf{R},\ X(\lambda f + \mu g) = \lambda X(f) + \mu X(g);$$
$$X(f \cdot g) = f(x_0) \cdot X(g) + g(x_0) \cdot X(f)$$

Fie $\mathcal{T}_A = \{(x_0,\ T_A x_0)\ x_0 \in \mathbb{R}\}$.

Definiție. Prin structura diferențială vom înțelege ansamblul $(\mathbb{R},\ A,\ \mathcal{T}_A)$, iar R înzestrat cu această structură se va numi spațiu diferențial.

Definiție. Structura diferențială $(\mathbb{R},\ A,\ \mathcal{T}_A)$ se numește regulată dacă $\dim T_{A,x_1} = \dim T_{A,x_2}$ pentru orice $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

BIBLIOGRAFIE

1. G. de Rham, Variétés différentiables, Hermann, Paris, 1965.
2. D. I. Papuc, Elemente de geometrie diferențială globală, Ed. did. și ped., 1970.

STRUCTURES DIFFÉRENTIELLES ET ESPACES TANGENTS

RÉSUMÉ

Dans cet ouvrage on considére des sous algèbres d'algèbre $C^\infty(R)$ et on étudie des espaces tangents associés des cettes sous algèbres (L'espace tangent des cettes sous algèbres ètand l'espace des dérivations de sous algèbre considerés).

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara
Tom 26 (40) Fascicola 1—1981
SERIA MATEMATICĂ-FIZICĂ

CONTRIBUŢII PRIVIND UTILIZAREA TRADUCTORILOR REZISTIVI LA TEMPERATURI JOASE

DE

I. DAMIAN, M. CRISTEA, M. DAVID, I. MIRON

Primită la redacţie la data 19 II 1980

Cercetările ştiinţifice şi tehnice actuale au impus utilizarea pe scară largă a temperaturilor scăzute şi în consecinţă au determinat înmulţirea investigaţiilor în scopul creerii de mijloace şi metode de măsurare a temperaturii, cît mai avantajoase.

În lucrarea de faţă sînt expuse o parte din rezultatele cercetărilor efectuate în Catedra de fizică a I.P.T.V.T. cu privire la utilizarea ca traductor de temperatură în domeniul temperaturilor joase a rezistenţei electrice a unui metal.

Se ştie [1], [2] că în acord cu regula lui Matthiessen rezistenţa electrică totală a unui conductor poate fi exprimată prin suma a doi termeni :

$$\rho_t = \rho_r + \rho_i(T)$$

unde ρ_r reprezintă rezistenţa reziduală datorită împrăştierii electronilor pe defectele chimice şi fizice ale reţelei cristaline iar $\rho_i(T)$ este rezistenţa ideală datorită interacţiunii electronilor cu fononii. Rezistenţa totală depinde de temperatura prin componenta ρ_i. Funcţia $\rho_i(T)$ scade aproximativ liniar cu T pînă la o temperatură de ordinul $\frac{1}{3}\theta_D$, în care θ_D este temperatura Debye caracteristică fiecărui metal. La temperaturi mai joase, $\rho_i \sim T^n$, $3 < n < 5$ din care cauză sensibilitatea termometrelor cu rezistenţă scade foarte rapid la temperaturi foarte joase.

Pentru termometria temperaturilor joase, metalele utilizate în calitate de termometre cu rezistenţă trebuie să posede următoarele caracteristici : [1], [3] :

1. La temperaturi ridicate, dependenţa de temperatură a rezistenţei ideale $\rho_i(T)$ trebuie să fie descrisă de o lege cît mai apropiată de cea liniară, pentru a simplifica interpolarea rezultatelor măsurătorilor ;

2. Pentru aplicaţiile la temperaturi joase, metalul trebuie să posede temperatura Debye, θ_D, cît mai scăzută, ceea ce permite să se menţină o sensibilitate mare a termometrului şi la temperaturi joase ;

3. Puritatea metalului să fie foarte ridicată, ceea ce face posibilă neglijarea rezistenţei ρ_r într-un interval suficient de mare de temperatură ;

4. Metalul trebuie să fie inert, iar rezistenţa lui să nu fie afectată de variaţiile periodice ale temperaturii, spre a oferi o stabilitate etalonării termometrului.

Utilizarea platinei la confectionarea termometrelor cu rezistenţă a condus la obţinerea celor mai bune performanţe. S-au mai construit termometre folosind sîrma de plumb, indiu, bismut, cupru, etc.

În vederea investigării senzorilor rezistivi a fost confecţionat un senzor de cupru, metal care răspunde bine condiţiilor de mai sus. În plus, a fost preferat cuprul din cauza unor argumente practice : preţul scăzut, procurare facilă, rezistenţă mecanică mare.

Măsurarea temperaturilor joase cu ajutorul rezistenţei de cupru se bazează pe măsurarea rezistenţei electrice a senzorului din cupru, utilizînd o punte de rezistenţă în curent alternativ.

Puntea de măsură (fig. 1) se compune din următoarele blocuri : oscilatorul, punctea propriu-zisă, amplificatorul şi sursa de alimentare.

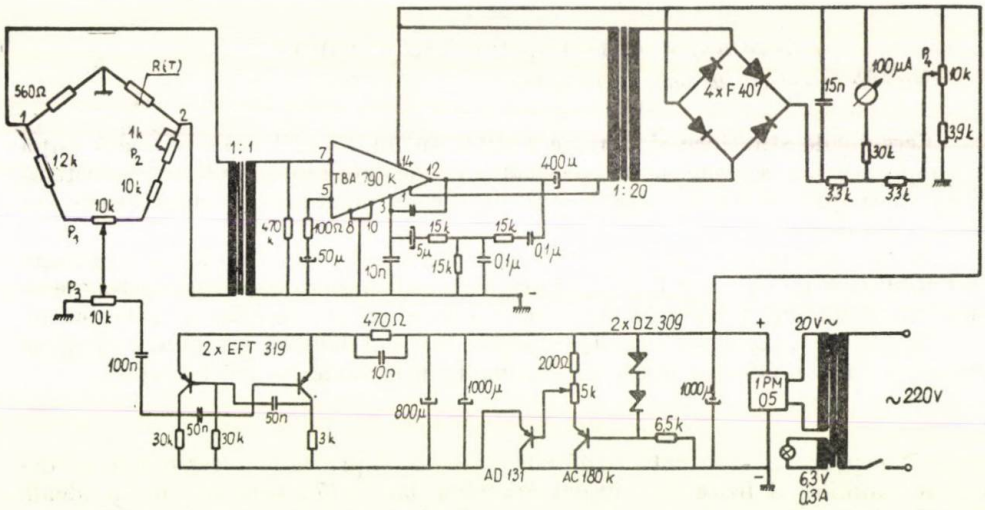


Fig. 1. Schema electrică a punţii de măsură.

Oscilatorul furnizează tensiunea alternativă care alimentează puntea, valoarea nivelului acesteia fiind reglată cu potenţiometrul P 3. Potenţiometrul P 2 aflat într-unul din braţele punţii permite calibrarea acesteia (obţinerea unei indicaţii anumite pentru senzorul aflat la o temperatură prestabilită). Echilibrarea punţii se face cu ajutorul potenţiometrului P 1, accesibil pe panoul frontal al aparatului, $R\,(T)$ reprezintă traductorul de temperatură. Potenţiometrul P 1 este acţionat printr-un sistem de demultiplicare, cu ajutorul unui buton de reglaj aflat pe panoul frontal. Pe axul butonului de reglaj este fixat solidar un disc gradat pentru reperarea echilibrului punţii, evidenţiat prin indicaţia minimă a instrumentului de măsură. Tensiunea culeasă între punctele 1 şi 2 ale punţii este amplificată şi redresată în continuare. Amplificatorul este realizat cu circuitul integrat TBA 790 K, iar redresarea se obţine cu grupul de diode F 407. Tensiunea redresată se aplică instrumentului de măsură în opoziţie cu o tensiune continuă reglată prin potenţiometrul P 4, obţinută de la sursa de curent continuu. Tensiunea continuă de alimentare se obţine cu puntea redresoare 1 PMO5 şi grupul de stabilizare format din diodele DZ 309 şi tranzistoarele AC 180 K, AD 131.

Traductorul de temperatură (senzorul) a fost confecţionat din sîrmă de cupru emailată, cu diametrul de 0,03 mm, înfăşurată pe un miez de cupru (fig. 2).

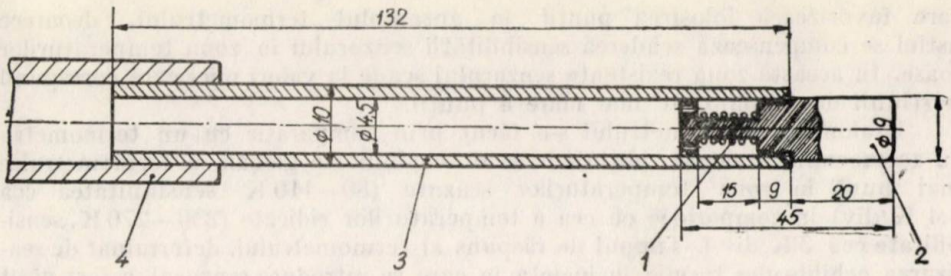


Fig. 2. Schița senzorului: *1* — sîrmă de cupru, *2* — miez de cupru, *3* — tub de teflon, *4* — mîner izolat.

Drept tub de protecție (teacă) s-a folosit o țeavă de teflon (diametrul 10 mm, lungime 132 mm) care se înșurubează în miezul de cupru. Rezistența de cupru este legată la puntea de măsură printr-un cablu ecranat. La temperatura camerei senzorul are rezistența de 544Ω.

Adoptînd această modalitate de construcție a senzorului, s-au valorificat atît rezultatele prezentate în literatura de specialitate [4] cît și investigațiile noastre de laborator.

Calitățile termometrului realizat în laboratorul de fizică sînt determinate pe de o parte de precizia și sensibilitatea punții, iar pe de altă parte de calitățile senzorului.

În vederea obținerii de date cu privire la sensibilitatea punții, aceasta s-a etalonat în ohmi cu ajutorul unei cutii de rezistență TESLA. Din diagrama de etalonare, prezentată în fig. 3, se observă că există două regiunri distincte de sensibilități diferite. În zona rezistențelor mici (I) puntea este mai sensibilă (0,5 div/Ω) decît în zona rezistențelor mari (cca. 0,2 div/Ω). Această compor-

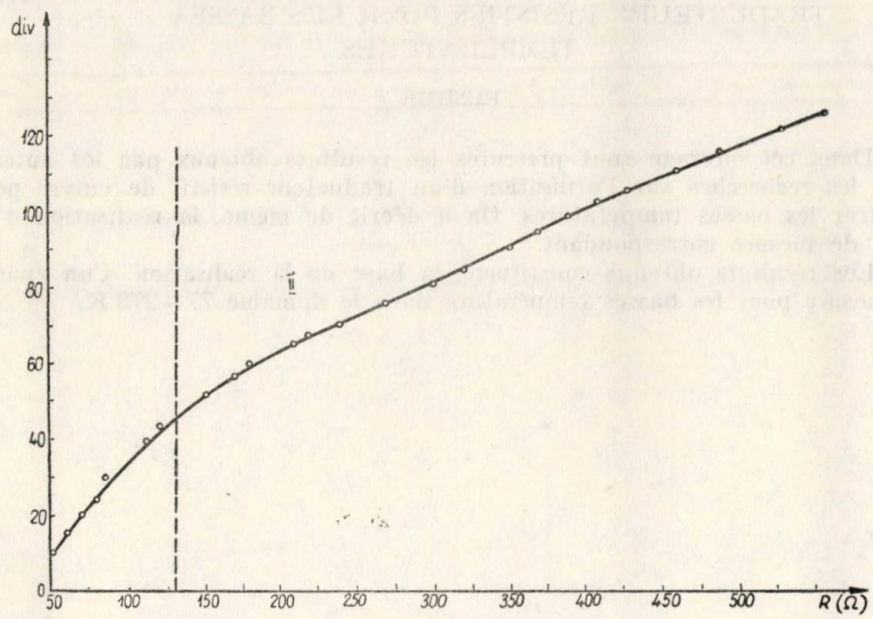


Fig. 3. Diagrama de etalonare.

tare favorizează folosirea punții în ansamblul termometrului, deoarece astfel se compensează scăderea sensibilității senzorului în zona temperaturilor joase. În această zonă rezistența senzorului scade la valori mici care corespund porțiunii de sensibilitate mai mare a punții.

Etalonarea termometrului s-a făcut prin comparație cu un termometru cu termocuplu etalonat, obținîndu-se o sensibilitate globală a termometrului mai bună în zona temperaturilor scăzute (80—110 K, sensibilitatea cca 1,4 K/div) în comparație cu cea a temperaturilor ridicate (230—270 K, sensibilitate cca 3 K/div.). Timpul de răspuns al termometrului, determinat de realizarea echilibrului termic în incinta în care se introduce senzorul, a fost găsit de cca 15 min. (în mediul gazos).

Dispozitivul a fost realizat cu componente produse în țară sau care pot fi înlocuite cu altele din țară.

Termometrul experimentat în aceste cercetări permite obținerea unor rezultate bune la măsurarea temperaturii joase a mediilor lichide și este mai puțin costisitor decît aparatele similare din import.

BIBLIOGRAFIE

[1] Balla D., Deutsch R. V., Introducere în fizica temperaturilor joase, Ed. Acad. R.S.R. București, 1970.
[2] Blatt J. F., Physics of electronic conduction in solids, McGraw-Hill Book Company New York 1968.
[3] Rose-Innes A. C., Low temperature techniques English Univ. Press Ltd. London 1964.
[4] Iordache Gh., Ivan M., Perva O., Aparate electronice pentru măsurarea temperaturii, Ed. Tehn., București, 1971.

CONTRIBUTIONS CONCERNANT L'UTILISATION DES TRADUCTEURS RÉSISTIFS POUR LES BASSES TEMPÉRATURES

RÉSUMÉ

Dans cet ouvrage sont presentés les resultats obtenus par les auteurs dans les recherches sur l'utilisation d'un traducteur résistif de cuivre pour mesurer les basses températures. On a décrit de même, la réalisation d'un pont de mesure correspondant.

Les résultats obtenus constituent la base de la réalisation d'un apareil de mesure pour les basses température dans le domaine 77—273 K.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara
Tom 26 (40) Fascicola 1—1981
SERIA MATEMATICĂ-FIZICĂ

ASUPRA APLICĂRII EFECTULUI SEEBECK LA MĂSURAREA TEMPERATURILOR JOASE

DE

M. CRISTEA, I. DAMIAN, I. MIRON, M. DAVID

Primită la redacţie la data 19 II 1980

I. Introducere

Termometrele cu termocuple se bazează pe efectul Seebeck şi ele oferă o modalitate convenabilă şi precisă pentru măsurarea diferenţelor de temperatură. Termocuplul cel mai frecvent utilizat datorită, în special, accesibilităţii materialelor din care este confecţionat este cel de cupru-constant (60% Cu+ +40% Ni) care permite măsurarea temperaturii cu o precizie de $\pm 0{,}1$ K dacă măsurarea tensiunii termoelectromotoare (t.t.e.m.) se face destul de precis [1], [2], [3]. Omogenitatea conductorilor care constituie termocuplul are o importanţă deosebită deoarece neomogenităţile prezente în conductori sînt echivalente cu termocuple locale concectate în serie, paralel sau mixt cu termocuplul de bază. Gradientele de temperatură existente în aceste locuri dezvoltă t.t.e.m. parazite care introduc erori mari în determinarea temperaturii. Gradul de neomogenitate creşte odată cu micşorarea diametrului conductorului şi din acest motiv nu se recomandă, de exemplu, confecţionarea termocuplului cupru-constantan din fire cu diametre mai mici de 0,15 şi respectiv 0,25 mm [4], [5], [6].

În fig. 1 este reprezentată scăderea comparativă a sensibilităţii (dE/dT) cu temperatura la mai multe tipuri de termocuple [7], [8].

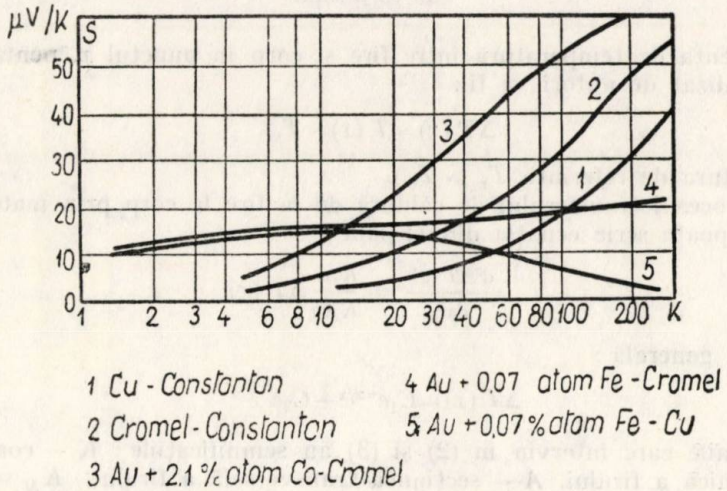


Fig. 1. Dependenţa sensibilităţii (S) în funcţie de temperatură la cîteva termocuple.

Sensibilitatea termocuplului cupru-constantan devine nesatisfăcătoare în domeniul 20—30 K, motiv pentru care nu este recomandat la temperaturi sub 20 K.

Precizia cu care poate fi determinată temperatura depinde de omogenitatea conductorilor, stabilitatea temperaturii de referinţă şi precizia măsurării t.t.e.m.

II. Contactul termic al termocuplelor pentru măsurarea temperaturii corpurilor solide

La temperaturi joase apar cîteva probleme datorită rezistenţelor termice mari întîmpinate.

Pentru măsurarea temperaturii unui corp solid termocuplele se fixează de acesta cu un material adeziv sau lac care îndeplineşte următoarele condiţii : nu se fisurează prin răcire, are conductibilitate termică destul de bună şi este un izolator electric.

Transferul de căldură de la firele termocuplului prin materialul de fixare, introduce o diferenţă de temperatură între joncţiunea termocuplului şi corpul de măsurat. Această diferenţă de temperatură depinde de transferul de căldură prin fire şi rezistenţa contactului termic dintre fire şi corp.

Dacă se consideră un termpcuplu simetric (fig. 2 a, b) constituit din firele 1 şi 2 cu joncţiunea (j) la $x=0$ şi fixat de corpul la temperatura de măsurat T_m după modelul dat de Kopp şi Slack [9] se pot face următoarele consideraţii :

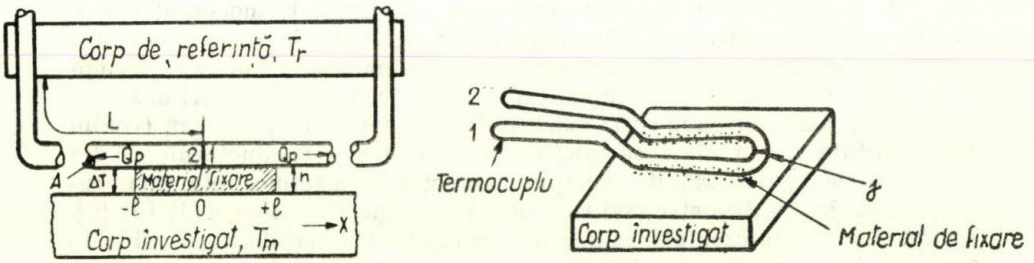


Fig. 2. a) Joncţiunea (J) unui termocuplu simetric b) Fixarea unui termocuplu pe un corp solid.

Diferenţa de temperatură între fire şi corp în punctul x, pentru termocuplul realizat de autori va fi :

$$\Delta T\,(x)=T\,(x)-T_m \tag{1}$$

(Temperatura de referinţă $T_r > T_m$).

În procesul transferului de căldură de la fire la corp prin materialul de fixare se poate scrie ecuaţia diferenţială

$$\frac{\mathrm{d}^2\Delta T\,(x)}{\mathrm{d}x^2}=\frac{K_M s}{KAh}\Delta T\,(x) \tag{2}$$

cu soluţia generală :

$$\Delta T\,(x)=C_1e^{-x/\alpha}+C_2e^{+x/\alpha} \tag{3}$$

Mărimile care intervin în (2) şi (3) au semnificaţiile : K — conductibilitatea termică a firului, A — secţiunea transversală a firului, K_M — conductibilitatea termică a materialului de fixare de grosime h şi suprafaţa s.

În soluția (2)

$$\alpha = \left(\frac{KAh}{K_M}\right)^{1/2}_{s} \tag{4}$$

Punînd condițiile de margine $\Delta T(-l)=\Delta T_1$ și $\Delta T(+l)=\Delta T_2$ și de simetrie $\Delta T_1=\Delta T_2$, se obține;

$$\Delta T(x)=\Delta T_1 \frac{\cosh(x/\alpha)}{\cosh(l/\alpha)} \tag{5}$$

$$\Delta T(0)=\Delta T_1 \cdot F\left(\frac{l}{\alpha}\right) \tag{6}$$

unde $F(l/\alpha)=\operatorname{sech}(l/\alpha)$ și reprezintă factorul de atenuare care descrie efectele moderării termice. Pentru o moderare termică bună $\Delta T(0)$ este mic, ceea ce implică $l \ll \alpha$, deoarece $F(l/\alpha) \sim 2e^{-l/\alpha}$ rezultînd că este necesară o „lungime fixată" l mare sau o „lungime caracteristică" α, mică.

Lungimea caracteristică pentru majoritatea firelor este de ordinul cîtorva milimetrii.

Rezistența contactului termic realizat prin materialul de fixare (fig. 2) este definită ca $W_c=T_c/Q_1$, unde

$$Q_1=Q(+l)=-KA\left(\frac{\mathrm{d}T(x)}{\mathrm{d}x}\right)_{x=+l}=\Delta T_1 \frac{AK}{\alpha}\tanh\frac{l}{\alpha}$$

iar

$$W_c=\frac{\alpha}{AK}\coth\frac{l}{\alpha}$$

Pentru o fixare neadecvată ($l<\alpha$) W este foarte mare, iar pentru fixare normală $l \gg \alpha$ se obține $W_c=\alpha/AK$, adică este independentă de lungimea fixată l și de lungimea caracteristică α a firului.

Eroarea relativă asupra temperaturii joncțiunii evaluată ca în lucrarea [9] este dată de relația

$$\varepsilon \simeq 2\frac{\alpha}{L}e^{-l/\alpha}$$

pentru $\alpha \ll l \ll L$. Rezultă că este mult mai eficace că crească lungimea fixată decît lungimea totală în concordanță cu lucrările [4] [9] [10].

III. Descrierea aparatului de măsură realizat

Firele de cupru și constantan au o lungime de 960 mm și un diametru de 0,5 mm. Pentru a evita scu-tcircuitarea firelor de-a lungul acestora, unul dintre ele (firul de cupru) a fost introdus într-un tub de PVC. Ansamblul celor două fire a fost introdus într-un alt tub de PVC, conferindu-i o rezistență mecanică sporită. Capetele libere ale termocuplului au fost fixate într-o mufă care permite racordarea ușoară la aparatul de măsură a t.t.e.m. Semnalul generat de termocuplu are valori mici (în cazul materialelor utilizate în acest caz, sensibilitatea în domeniul de temperatură 77—273 K este mai mică decît 45 μV/K) necesitînd amplificare.

În fig. 3 este redată schema electrică concepută pentru construirea amplificatorului.

Amplificatorul electronic propriu-zis este echipat cu circuitul integrat TBA 222. Potențiometrele de 5 KΩ și respectiv 100 KΩ permit reglarea temperaturii minime și respectiv maxime pe scala instrumentului de măsură. De fapt cele două potențiometre reglează tensiunea de echilibru a circuitului integrat, respectiv tensiunea de reacție care să asigure o amplificare corespunzătoare. În scopul măririi preciziei aparatului, intervalul de temperatură pentru care a fost etalonat, a fost secționat în patru domenii. În fiecare dintre aceste domenii

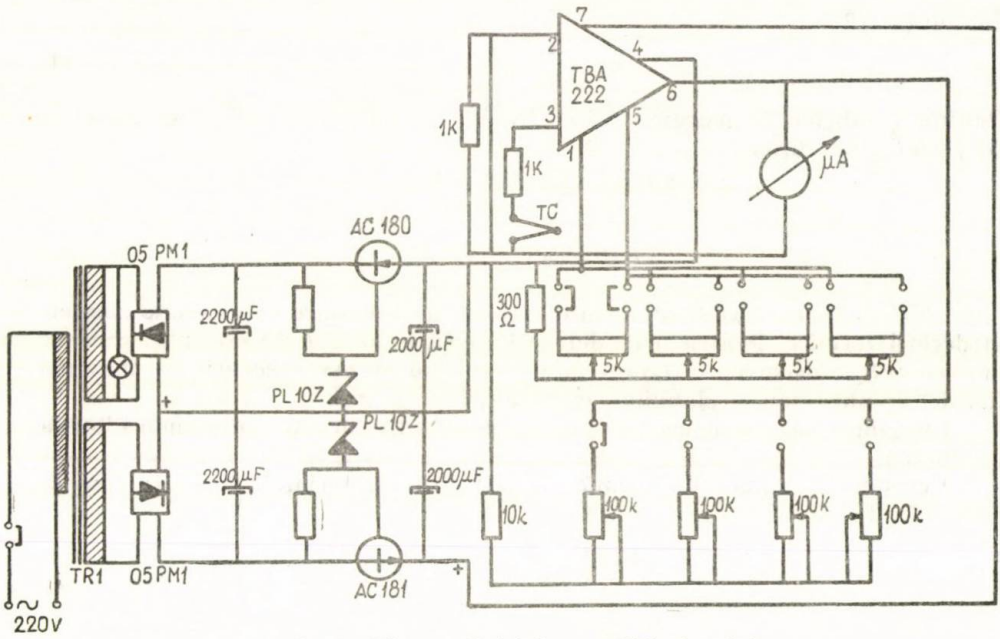


Fig. 3. Schema electrică a amplificatorului.

sensibilitatea aparatului a fost aleasă folosind perechi de potenţiometre de 5 KΩ şi respectiv 100 KΩ, reglate corespunzător în timpul operaţiei de etalonare a aparatului.

Alimentarea amplificatorului se face de la un redresor stabilizat dublu de ±10 V, încorporat în aparat. Aparatul este asamblat într-o cutie metalică de dimensiuni 110+175×170 mm şi este însoţit de diagrama de etalonare corespunzătoare celor patru domenii de măsură, ridicate prin comparaţie cu un alt termometru criogenic.

Precizia măsurătorilor este de cca ±1 K. Materialele utilizate sînt de fabricaţie românească sau pot fi înlocuite cu alte produse din ţară. Performanţele aparatului sînt comparabile cu ale termometrelor criogenice din import.

BIBLIOGRAFIE

1. Berman R. şi al. Cryogenics, 1963, 2 p. 70.
3. Finnemore D. K., Rev. Sci. Instrum., 1965, 9, p. 36.
3. Medvedeva L. A. şi al. Prib. i Tekh. Exper., 1970, 5 p. 208.
4. Berman R. şi al. Cryogenics, 1964, 4 p. 233.
5. Rosenbaum R. L. Rev. Sci. Instrum. 1968, 39 p. 6890.
6. Connan A. şi al. Revue de Physique Appliquée, 1971, 6 p. 383.
7. Braghin B. K. şi al., Izmeritelinaia tehnika, 1964, 6 p. 30.
8. Fastovski B. G. şi al. Kriogenaia tehnika, Energhia, Moskva, 1974.
9. Kopp J., Slack G. A. Cryogenics, 1971, 1 p. 22.
10. T9ggart J. H., Slack G. A., Cryogenics 1969 9 p. 384.

SUR L'APPLICATION DE L'EFFET SEEBECK À LA MESURE DES BASSES TEMPÉRATURES

RÉSUMÉ

Dans cet ouvrage sont presentés les résultats des recherches qui ont conduit à la réalisation d'un thermomètre cryogénique à thermocouple cuivre-constantan, utilisable dans le domaine de température 77—273 K.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara
Tom 26 (40) **Fascicola 1—1981**
SERIA MATEMATICĂ-FIZICĂ

A CUBIC FORM FOR THE ELECTRONIC STOPPING POWER

BY
V. T. DOROBANŢU, T. PALADE

Primită la redacţie la data de 8 III 1980

1. Introduction

The problem of knowing the mechanism of the stopping power, when we have to do with nuclear reactions, is a very important one. For exemple, in the Doppler shift lifetime measurements one has to know the explicit form of the stopping power, more precisely, the analytic formula for the electronic stopping power, in order to calculate the attenuation factor $F(\tau)$ [1].LSS theory [2] proposed a linear dependence between electronic stopping power and the speed of the recoilling nucleus.

$$-\left(\frac{dE}{dx}\right)_{el} = k_e v \tag{1}$$

where k_e is a coefficient depending on the nuclear masses and atomic numbers of the recoilling and target nuclei, respectively.

This expression works when the velocity of the recoilling nucleus does not exceed $v_0 \cdot z_1^{2/3}$ where $v_0 = e^2/h$ and z_1 — the atomic number of the recoilling nucleus. Now, when greater and greater energies of the bombarding particles are available, one must look for another forms for the electronic stopping power.

2. The stopping process

Let $a + A \rightarrow B^* + b$
be a nuclear reaction, with

a — the incident particle
A — the nuclear targent
B^* — the excited recoilling nucleus
b — the light particles produced by reaction.

The recoilling nucleus is subjected to the stopping process in the movement into the target or backing. Mainly this process has two components :

i — the electronic stopping power, due to collisions with electrons of the target or backing.

ii — the nuclear stopping power, due to collisions with the nuclei of the target or backing.

At high speeds of the recoilling nuclei, the first component is dominant, while at small velocities the second [3].

Because of the large velocities ($>v_0 z_1^{2/3}$) of the recoilling nuclei, involved now in heavy ion reactions, we are interested in the electronic stopping power, only.

3. A cubic dependence of the electronic stopping power

As we will show in a further publication

$$\left(-\frac{dE}{dx}\right)_{el} = k_1 v - k_3 v^3 \tag{2}$$

can be traeted as a natural extension of the theory of structural stability [4] to the dissipative processes.

Using the „last squares method" we have fitted the $\left(-\frac{dE}{dx}\right)_{el}$ experimental data of Northcliff and Shilling [5] — within an error of 3% — getting values for k_3 — coefficient, depending in a periodical way on the atomic number of the recoilling nucleus.

If equation (2) is the actual form — and so it seems to be — then solving this differential equation one gets the following expression for the velocity.

$$v(t) = C_f v(0)\, e^{-t/\alpha_1}$$

where

$$\alpha_1 = \frac{M_1 \cdot v_0}{\rho k_1}$$

$$C_f = [1 - ak\,(1 - e^{-2t/\alpha_1})]^{-1/2}$$

$$a = \left(\frac{v(0)}{v_0}\right)^2$$

$$k = \frac{k_3}{k_1}$$

$v(0)$ — initial velocity of the recoilling nucleus
M_1 — mass of the recoilling nucleus
— density of the stopping material

One also can get a form for the velocity distribution of the recoilling nuclei

$$\frac{dN}{dV} = N(0)\, S V^{S-1} \frac{(1 - k \cdot a)^{S/2}}{(1 - k \cdot V^2)\,(1 - akV^2)^{S/2}} \tag{6}$$

with

$$V = \frac{v(t)}{v(0)}$$

$$S = \frac{\alpha_1}{\tau}$$

τ — lifetime of the nuclear excited state of the recoilling nucleus

The attenuation factor $F(\tau)$ can now be defined by

$$F(\tau) = \frac{\int_0^1 V\left(\frac{dN}{dV}\right)dV}{\int_0^1 \left|\frac{dN}{dV}\right|dV} \tag{7}$$

where $\frac{dN}{dV}$ is given by (6).

4. Conclusion

To use an expression like (2) for the electronic stopping power, is much more adequate because of the high energies involved now in nuclear reaction. Of course there are some difficulties connected with the explicit calculations of $F(\tau)$.

REFERENCES

1. Dorobaţu V. T., Popa M. S., Stud. Cerc Fiz., 1976, (28), p. 941.
2. Lindhard J., Scharff M., Schiott H. E. Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk., 1963, 33, (14).
3. Catz A. L., Amiel S., Nucl. Phys., 1967, A 92, p. 222.
4. Thom R., Structural stability and Morphogenesis, Benjamin, 1975.
5. Northcliff L. C., Shilling R. E., Nucl. Data Tables, 1970, A 7, p. 233.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara
Tom 26 (40) **Fascicola 1—1981**
SERIA MATEMATICĂ-FIZICĂ

ON THE ATTENUATION FACTOR $F(\tau)$

BY
V. T. DOROBANŢU

Recived 9 V 1980

1. Introduction

The determination of the lifetime τ, of one of the excited states by using the Doppler Shift Attenuation Method (DSAM) turns out, as known [1], to compare the experimental value of the attenuation factor $F(\tau)$ with the theoretical estimation of the dependence on the lifetime.

If one considers an excited recoilling nucleus moving with the velocity $v(t)$ and as a result of the deexcitation, it emits a gamma ray, then due to the Doppler effect, the observed energy E will be different from energy E_0, which would be obtained when the recoilling nucleus is at rest

$$E_\gamma = E_0 [1 + (v(t)/c) \cos \theta]$$

and one obtains a Doppler shift

$$\Delta E_\gamma = E_0 \frac{v(t)}{c} \cos \theta$$

Let us assume that $P(0)$ is the initial population ($t=0$) of a level whose lifetime τ is to be determined, the population at a subsequent time t, will be obviously $P(t) = P(0) \exp(-t/\tau)$. If in the time interval dt, $dP(t)$ nuclei will deexcite, the average Doppler shift corresponding to the gamma radiations coming from these, is

$$\langle \Delta E_\gamma \rangle = \int_0^\infty \Delta E_\gamma P(t)\, dt \Big/ \int_0^\infty P(t)\, dt$$

and the ratio between the average Doppler shift and the maximum Doppler shift is defined as an attenuation factor $F(\tau)$

$$F(\tau) = \frac{\langle \Delta E_\gamma \rangle}{\Delta E_{max}} = \frac{1}{\Delta E_{max}} \int_0^\infty \Delta E_\gamma P(t)\, dt \Big/ \int_0^\infty P(t)\, dt \qquad (1)$$

Taking into account that the Doppler shift is also affected by the change of the moving direction by a scattering angle φ [2] one gets

$$F(\tau) = \frac{1}{v(0)\tau} \int_0^\infty v(t) \langle \cos \varphi \rangle e^{-t/\tau} dt \qquad (2)$$

Relation (2) defining $F(\tau)$ and ultimately leading to the determination of the lifetime τ, is valid in the case when the level to be studied is populated directly only, but in actual physical conditions a certain level can be populated both directly and by cascades from upper states (fig. 1) and this, as will be shown, will appreciably change the expression of $F(\tau)$.

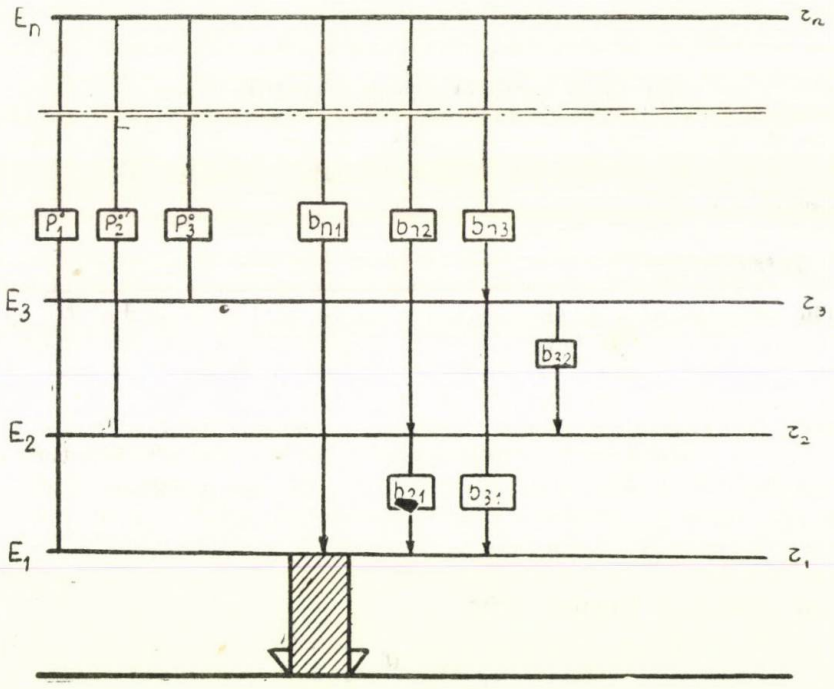


Fig. 1.

2. The calculation of the total population of a level

The total population of one of the excites states sequence of the nucleus to be studied is obviously the results of the direct population aw well as of the cascades from upper levels.

The levels supplying the population on the nuclear states of interest, will be indexed in order of the increasing energy taking as a first level the studied excited state, and as a last level, the uppermost one which still provides by cascade, population for the level whose lifetime is to be determined.

Let $\lambda_j = 1/\tau_j$ be the decay constant of the j level ($j=1, 2, \ldots n$) and b_{ij} the brancing ratio of the level of index i toward the level of index j. There follows then $\sum_{i=1}^{n} b_{ij} = 1$, and $b_{ij} = 0$, for $i \leqslant j$, $i, j = 1, 2, \ldots n$.

Let also $P_j(t)$ be the number of ecxited states of energy E_j, that is the population at the time t. Let us choose the initial time at $t=0$, as the moment of the formation of the state with $j=n$ and label by P_j^0 the population of the j-level at $t=0$.

In an infinitesimal time interval dt the total variation $dP_j(t)$ of the number of excited states of energy E_j will be expressed by the difference between the number of states E_j populated directly and/or by cascades from upper levels

and the number of states E_j decaying in the same time interval, populating in this way the lower energy levels. The first is the sum of the contributions of the upper levels, contributions expressed by the absolute value of the variation of population $P_j(t)$ multiplied by the brancing ratio of the transition $E_i \to E_j$, $(i > j)$. Thus

$$dP_j(t) \mid_{produced} = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} \mid dP_i \mid \tag{3}$$

extending the sum from 1 to n since the terms $i=1, 2, \ldots j$ do not contribute effectively to the result, the corresponding brancing ratios being zero.

$$dP_j(t) \mid_{produced} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_{ij} P_i(t)\, dt \tag{4}$$

So

$$dP_j(t) = dP_j(t) \mid_{produced} - dP_j(t) \mid_{decaying} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_{ij} P_i(t)\, dt -$$

$$-\lambda_j P_j(t)\, dt \tag{5}$$

The total population $P_j(t)$ of the level j can be obtained by integrating the equation

$$\frac{dP_j(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_{ij} P_i(t) - \lambda_j P_j \tag{6}$$

with the initial conditions

$$P_j(0) = P_j^0, \; j=1, 2, \ldots n \tag{7}$$

or if one writes

$$B_{ij} = \lambda_i (b_{ij} - \delta_{ij}), \; i, j=1, 2, \ldots n \tag{8}$$

with

$$B_{ij} = \begin{cases} 0, & i < j \\ -\lambda_j & i = j \\ \lambda_i b_{ij}, & i > j \end{cases} \tag{9}$$

we get

$$\frac{dP_j(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} B_{ij} P_i(t) \tag{10}$$

Therefore we can obtain the populations $P_1(t)$, $P_2(t)$, $\ldots P_n(t)$ by solving the system of n linear differential equations with constant coefficients. Explicitely, the system is of the following form

$$\begin{aligned}
\frac{dP_1(t)}{dt} &= B_{11}P_1(t) + B_{21}P_2(t) + B_{31}P_3(t) + \ldots + B_{n1}P_n(t) \\
\frac{dP_2(t)}{dt} &= 0 \qquad + B_{22}P_2(t) + B_{32}P_3(t) = \ldots + B_{n2}P_n(t) \qquad (10') \\
&\vdots \\
\frac{dP_n(t)}{dt} &= 0 \qquad + \quad 0 \quad + \ldots\ldots\ldots + B_{nn}P_n(t)
\end{aligned}$$

The general solution of the system is

$$\| P(t) \| = \exp(\| B \| \cdot t) \cdot \| P^{\circ} \| \tag{11}$$

where

$$\| P(t) \| = \begin{Vmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ \vdots \\ P_n(t) \end{Vmatrix} \tag{12}$$

$$\| B \| = \begin{Vmatrix} B_{11} & B_{21} & B_{31} & \dots & B_{n1} \\ 0 & B_{22} & B_{32} & \dots & B_{n2} \\ 0 & 0 & B_{33} & \dots & B_{n3} \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & B_{nn} \end{Vmatrix} \tag{13}$$

$$\| P^{\circ} \| = \begin{Vmatrix} P_1^{\circ} \\ P_2^{\circ} \\ \vdots \\ P_n^{\circ} \end{Vmatrix} \tag{14}$$

A function of matrix like $e^{\| B \| \cdot t}$ can be evaluated by using Baker's formula [3].

$$e^{\| B \| \cdot t} = \frac{D_{n-1}}{D} \| B \|^{n-1} + \frac{D_{n-2}}{D} \| B \|^{n-2} + \dots + \frac{D_1}{D} \| B \| + \frac{D_0}{D} \| 1 \| \tag{15}$$

with

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots 1 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \dots \mu_n \\ \mu_1^2 & \mu_2^2 & \mu_3^2 & \dots \mu_n^2 \\ \vdots & & & \\ \mu_1^{n-1} & \mu_2^{n-1} & \mu_3^{n-1} & \dots \mu_n^{n-1} \end{vmatrix} \tag{16}$$

$\mu_1, \mu_2 <, \dots \mu_n$ being the roots of the characteristic equation, and because of the special form of the matrix $\| B \|$ we have

$$\mu_i = B_{ii}, \quad i = 1, 2, \dots n$$

D_{i-1} results from D by replacing i-row by $e^{\mu_1 t}, e^{\mu_2 t}, \dots e^{\mu_n t}$

$$D_{i-1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots . 1 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \dots . \mu_n \\ \vdots & & & \\ \mu_1^{i-2} & \mu_2^{i-2} & \mu_3^{i-2} & \dots . \mu_n^{i-2} \\ e^{\mu_1 t} & e^{\mu_2 t} & e^{\mu_3 t} & \dots . e^{\mu_n t} \\ \mu_1^{i} & \mu_2^{i} & \mu_3^{i} & \dots . \mu_n^{i} \\ \vdots & & & \\ \mu_1^{n-1} & \mu_2^{n-2} & \mu_3^{n-1} & \dots . \mu_n^{n-1} \end{vmatrix} \tag{17}$$

When n is large, the evaluation of the great powers of the matrix can be done by using for example Sylvester's theorem

$$\| B \|^n = \sum_{r=1}^{p} \mu_r^n Z_r, \quad Z_r = \prod_{S \neq r} \frac{(\| B \| - \mu_S \| 1 \|)}{\mu_r - \mu_S} \tag{18}$$

where p is the number of roots of the characteristic equation.

The solution can be written as

$$\| P(t) \| = \left\{ \frac{D_0}{D} \| 1 \| + \sum_{i=2}^{n} \frac{D_{i-1}}{D} \| B \|^{i-1} \right\} \| P^\circ \| \tag{19}$$

3. $F(\tau)$ calculation

The attenuation factor $F(\tau)$ can be now evaluated by using the expression (1) and considering the form (11) for the total population of the level of interest. For example, let us take $n=2$. The total population of $P_1(t)$ being

$$P_1(t) = \left(P_1^\circ + P_2^\circ \frac{\lambda_2 b_{21}}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) e^{-\lambda_1 t} - P_2^\circ \frac{\lambda_2 b_{21}}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_2 t} \tag{20}$$

the attenuation factor $F(\tau_1, \tau_2)$ takes the form

$$F(\tau_1, \tau_2) = \frac{\left(\beta + b_{21} \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} \right) \frac{\alpha \tau_1}{\alpha + \tau_1} - b_{21} \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} \frac{\alpha \tau_2}{\alpha + \tau_2}}{\left(\beta + b_{21} \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} \right) \tau_1 - b_{21} \frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_1 - \tau_2}} \tag{21}$$

where $\beta = P_1^\circ / P_2^\circ$.

If $\frac{\tau_1}{\tau_2} \ll 1$, $F(\tau_1, \tau_2)$ becomes

$$F(\tau_1, \tau_2) \simeq \frac{\beta}{\beta + b_{21}} \frac{\alpha}{\alpha + \tau_1} \tag{22}$$

With $\beta \to \infty$ one gets for $F(\tau_1)$ the expression for an izolated level

$$F(\tau_1) = \frac{\alpha}{\alpha + \tau_1}$$

If $\frac{\tau_2}{\tau_1} \ll 1$, then

$$F(\tau_1) = \frac{\alpha}{\alpha + \tau_1}$$

which is also the attenuation factor for an izolated level.

If $\tau_1 = \tau_2 = \tau$ the attenuation factor is

$$F(\tau) = \frac{\alpha}{\alpha + \tau} \left(\frac{\beta}{\beta + b_{21}} + \frac{\alpha}{\alpha + \tau} \frac{b_{21}}{\beta + b_{21}} \right) \tag{23}$$

With $\beta \to \infty$ or $b_{21} \to 0$ $F(\tau)$ is again that for an izolated level. From this formalism of treating the attenuation factor one can see how the population by gamma cascades from the upper states can affect the determination of the lifetime of one of the interest level. This influence can reach sometimes 50%.

REFERENCES

1. V. T. Dorobanţu, M. S. Popa, R. Macrin Stud. Cerc. Fiz. 9 (28), 941, ((976).
2. A. E. Blaugrund, Nucl. Phys. 88, 501 (1966).
3. H. F. Baker, Proc. London Math. Soc. 347, (1902) and 293, (1905).

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara
Tom 26 (40) Fascicola 1—1981
SERIA MATEMATICĂ-FIZICĂ

INFLUENŢA SUBSTANŢELOR ABSORBITE ASUPRA ELECTROLUMINESCENŢEI PVC

DE

PETRU CRĂCIUN

Primită la redacţie la data de 3 III 1980

1. Introducere

Cu alte ocazii [1, 2] s-a arătat că policlurura de vinil (PVC) este capabilă de o luminescenţă cît timp este menţinută într-un cîmp electric continuu.

Caracteristica acestei electro-luminescenţe (EL) este că intensitatea ei se modifică în timp în funcţie de diverşi factori [3].

În prezenta lucrare se urmăreşte influenţa peliculei adsorbite la interfaţa policlorurii de vinil — electrodul de contact, asupra modificării intensităţii electroluminescente.

2. Modul de lucru

Celula electroluminescentă a fost realizată la fel ca cea descrisă în lucrările [1—3]. Ca şi catod s-a folosit o placă cilindrică (R=4,5 mm) de aluminiu, anodul fiind constituit dintr-o grilă de cupru (400 ochiuri/cm^2) iar folia de policlorură de vinil, de provenienţă tehnică, are grosimea d=0,37 mm. Tensiunea aplicată pe cei doi electrozi a fost tot timpul aceeaşi de 2 KV.

Pentru fiecare set de determinări s-a folosit cîte o folie nouă de PVC iar catodul din aluminiu era proaspăt prelucrat prin şmirgluire. Pentru a nu impurifica suprafaţa PVC cu care catodul ajunge în conctact, urmele de pulberi rămase pe catod în urma şmirgluirii erau îndepărtate cu grijă.

Înregistrarea electroluminescenţei fiecărei celule s-a extins pe intervale de timp cuprinse între 24 ore—48 ore. Celulele electroluminiscente utilizate se deosebesc între ele numai prin pelicula diferită a substanţei lichide create la interfaţa dintre catodul de aluminiu şi folia de PVC.

S-au utilizat trei tipuri de pelicule, avînd moleculele polare sau nepolare, din substanţe inerte din punct de vedere chimic cum sînt : uleiul de siliconi, uleiul de parafină şi apa distilată. Fiind cuprinse între folia PVC şi catodul de Al care se fixa prin presare pe suprafaţa PVC, grosimea peliculelor lichide era infimă, putînd fi considerată ca o impurificare superficială prin adsorbţie a catodului de Al.

3. Rezultate

Intensitatea electroluminescenţei celulei avînd catodul din Al iar ca dielectric policlorura de vinil scade în timp, relativ lent, astfel încît după circa 1/2 oră se poate considera că are o valoare pseudo-constantă (fig. 1 a). Intensi-

tatea inițială a electroluminescenței depinde de gradul inițial de prelucrare a catodului, ea fiind proporțională cu aria suprafeței de contact a catodului curățită prin abraziune.

După 24 ore din momentul abraziunii catodului și montării sale în electrocelulă, intensitatea electroluminescenței este cu circa 27% mai mică decît valoarea măsurată după primele 30 minute de înregistrare (fig. 1 b).

Cînd interfața catod (Al) — dielectric (PVC) este impurificată cu o peliculă de ulei siliconic ale cărui molecule în stare naturală sînt puternic polarizate, intensitatea electroluminescenței devine cu circa 3% mai mare în comparație cu intensitatea înregistrată după primele 30 minute, la aceeași celulă dar în lipsa uleiului siliconic (a se compara curbele *b* și *a* din fig. 2).

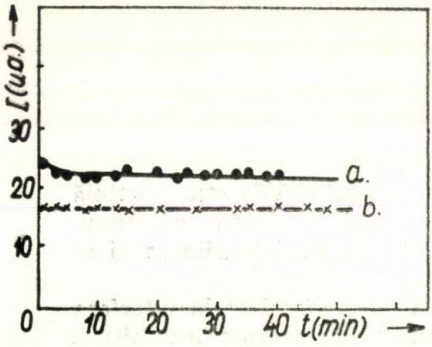


Fig. 1. Evoluția în timp a intensității electroluminescenței PVC : a) imediat după abraziunea catodului de Al ; b) după 24 ore.

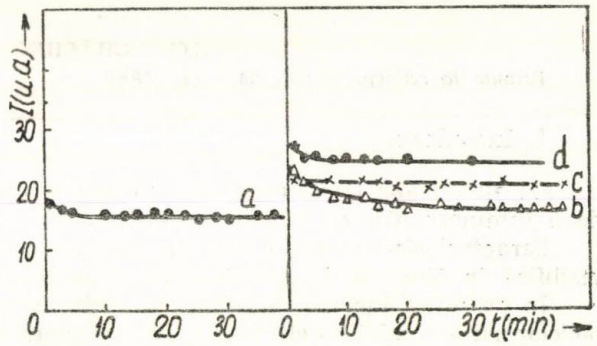


Fig. 2. Evoluția intensității E. L. a PVC în prezența unei pelicule de ulei siliconic : a) în absența peliculei ; b) imediat după formarea peliculei ; c, d) după 24 ore respectiv 48 de ore de la formarea peliculei.

După 24 ore intensitatea emisă de celula impurificată superficial cu ulei siliconic devine cu 33% mai mare decît intensitatea de referință măsurată în primele 30 minute cu celula neimpurificată (fig. 2 a, c). Creșterea intensității electroluminescenței este măsurabilă în continuare. În figura 2 d este redată intensitatea electroluminescenței înregistrată după 48 ore din momentul confecționării catodului de aluminiu, fiind cu circa 60% mai mare față de intensitatea de referință.

Nu la fel evoluează intensitatea E.L. cînd celula electroluminescentă este impurificată cu o peliculă de apă distilată, caracterizată și ea prin molecule puternic polare. În acest caz intensitatea se plasează deasupra intensității de referință a celulei neimpurificate (fig. 3 a, b) dar se atenuează rapid în timp.

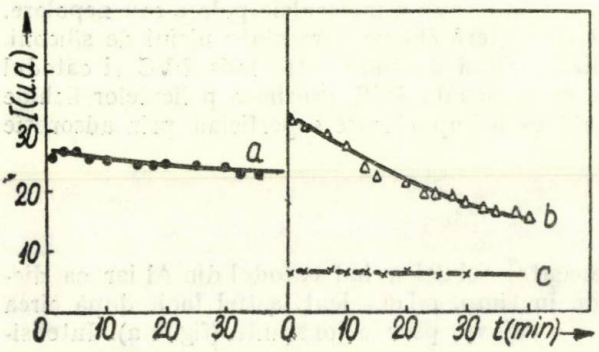


Fig. 3. Evoluția intensității E.L. a PVC în prezența unei pelicule de apă : a) în absența peliculei ; b) imediat după formarea peliculei ; c) după 24 ore.

Cum se poate constata din fig. 3, curba (b) ajunge la o valoare pseudoconstantă de-abea după 24 ore (fig. 3 c). Intensitatea E.L. pe care o reprezintă curba (b) este mult mai mică (cu de peste 3 ori) ca intensitatea de referinţă, adică cea emisă de celula neimpurificată.

În situaţia în care interfaţa catod (Al) — dielectric (PVC) este impurificată cu o substanţă a căror molecule sînt nepolare (polaritatea zero), cum este cazul uleiului de parafină utilizat de noi, intensitatea luminescenţei devine cu cîteva procente mai mică ca intensitatea de referinţă a celulei neimpurificată (figura 4 b, a). După 24 de ore intensitatea electroluminescenţei devine cu circa 67%, mai mică ca intensitatea de referinţă a celulei neimpurificate.

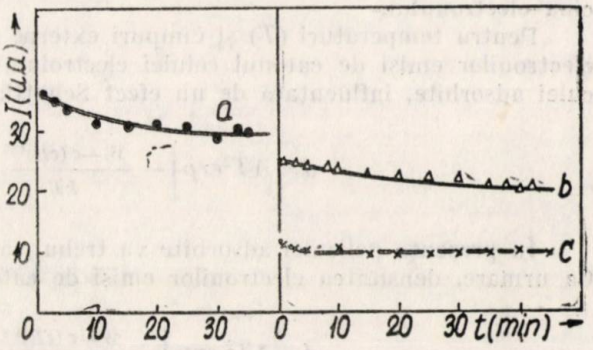


Fig. 4. Evoluţia în timp a E.L. PVC în prezenţa unei pelicule de ulei de parafină ; a) în absenţa peliculei ; b) imediat după formarea peliculei ; c) după 24 ore de la formarea peliculei.

4. Discuţii

Pentru explicarea fenomenului de electroluminescenţă în curent continuu nu există un model al proceselor unanim acceptat de cercetători. Pentru a putea explica electroluminescenţa policlorurii de vinil am adoptat mecanismul acceptat de unii cercetători [4—7] conform căruia emisia de lumină se datoreşte unui proces de excitare şi ionizare a reţelei mediului luminescent. Aceste excitări şi ionizări se petrec cînd electronii proveniţi de la catod sînt accelerați de cîmpul electric pînă la energii suficiente pentru a realiza ionizări şi excitări prin ciocnire.

În concordanţă cu acest mecanism, considerăm că emisivitatea catodului, care poate fi modificată în funcţie de condiţiile experimentale, joacă un rol principal în electroluminescenţa policlorurii de vinil. Creşterea sau micşorarea emisivităţii atrage după sine o mărire sau o diminuare a intensităţii E.L.

Cu aceste consideraţii se poate explica modificarea în timp a electroluminescenţei PVC, astfel :

În urma abraziunii catodului de aluminiu, suprafaţa metalică proaspăt descoperită se acoperă în cîteva secunde cu o peliculă monoatomică de oxtd [8]. Oxidarea se continuă şi în timp ce catodul este montat în celulă dar cu o viteză mult mai mică. Stratul de oxid de grosimi comparabile cu cel monoatomic poate stimula emisivitatea electronică prin apariţia centrelor exoelectronice [3]. Peste o anumită limită a grosimii sale el poate împiedica emisivitatea catodului.

În consecinţă, în timp, va scădea şi numărul electronilor care bombardează folia de PVC şi odată cu scăderea lor va scădea şi intensitatea electroluminescenţei (fig. 1, 2, 3, 4,a). După 24 de ore grosimea stratului de oxid evoluează aşa de lent încît practic se poate considera ca rămînînd constantă. Constant va rămîne şi numărul de electroni care străbat oxidul şi care determină luminescenţa PVC a cărei intensitate va deveni şi ea constantă (fig. 1) b.

Dacă pe suprafaţa catodului se formează o peliculă de substanţă polară (ulei siliconic), dipolii acesteia se orientează astfel încît stratul electric dublu creat de moleculele adsorbite şi electronii liberi din catod, supune electronii unei forţe dirijate spre exteriorul metalului. Această forţă are ca efect micşorarea energiei de extracţie din metal cu o valoare [9] :

$$\Delta W = 4\pi n e p \tag{1}$$

unde (n) — este numărul atomilor adsorbiţi pe unitatea de suprafaţă ; (p) — — momentul electric al unui dipol adsorbit pe suprafaţa catodului ; (e) — sarcina electronului.

Pentru temperaturi (T) şi cîmpuri externe (E) nu prea mari, densitatea electronilor emişi de catodul celulei electroluminescente va fi, în lipsa peliculei adsorbite, influenţată de un efect Schottky [9] :

$$J = A T^2 exp\left[-\frac{W - e\,(eE)^{1/2}}{kT}\right] \tag{2}$$

În prezenţa peliculei adsorbite va trebui să se ţină cont şi de relaţia (1) Ca urmare, densitatea electronilor emişi de catodul celulei va fi :

$$J = A T^2\, exp\left[-\frac{W - e\,(eE)^{1/2} - 4\pi n e p}{kT}\right] \tag{3}$$

În consecinţă, conform mecanismului acceptat mai sus de producere a electroluminescenţei, intensitatea E.L. va trebui să crească cînd la interfaţa catod-PVC există o peliculă polară, ceea ce se confirmă şi prin diagramele din fig. 2 (b, c, d).

Rezultatele ilustrate în fig. 3 (b, c) arată că în cazul în care pelicula adsorbită este apa sau o altă substanţă care ar putea reacţiona cu catodul, concluziile deduse mai sus nu mai sînt într-un totul valabile din cauza efectelor secundare suplimentare ce pot avea loc.

În cazul în care pelicula adsorbită este nepolară ($p=0$), relaţia (3) se reduce la (2). Ca urmare, densitatea de electroni emisă de catod ar trebui să se menţină constantă, la fel şi intensitatea electroluminescenţei. Însă din cauza peliculei formate la suprafaţa catodului scade intensitatea cîmpului (E) şi odată cu ea, efectul Schottky se diminuează conform cu relaţia (2). În consecinţă scade şi intensitatea E.L. aşa cum este ilustrată în fig. 4, în cazul existenţei unei pelicule interfaţiale de ulei de parafină.

5. Concluzii

Din cele de mai sus se poate afirma că substanţele adsorbite la interfaţa catod-PVC pot influenţa evoluţia intensităţii electroluminescenţei PVC prin modificarea emisivităţii electronice a catodului, astfel :

1. Substanţele polare, printr-un efect suplimentar de tip Schottky, măresc emisivitatea catodului iar ca urmare a acestui fapt creşte intensitatea electroluminescenţei.

2. Substanţele nepolare micşorează emisivitatea catodului prin diminuarea cîmpului electric extern şi implicit, diminuarea intensităţii E.L.

BIBLIOGRAFIE

[1] Crăciun P., Bul. I.P.T. (seria mat-fiz.), 21, 147 1(976).
[2] Crăciun P., Bul. I.P.T. (seria mat-fiz.), 22, 368 (1977)
[3] Crăciun P., Anal. Univ. Tmş (seria şt. fiz. chim.), 13, 29 (1975).
[4] Destrian G., Phys. Rev., 38, 700 (1947).
[5] Piper W. W., Williams F. E., Sol. Stta. Phys., 6, 95 (1956)
[6] Georgobiani A. N., Kok M. V., Optica i Spectr., 10, 188 (1961).
[7] Vereşciaghin I. K., „Electroluminiscenţia cristalov", Izdatelstvo Nauka, Moskva, 1974.
[8] Mader J., Acta Phys. Polon., 22, 59 (1962).
[9] Bădărău E., Popescu I., „Gaze ionizate", pag. 169—177, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1963.

L'INFLUENCE DES SUBSTANCES ADSORBÉS SUR L'ÉLECTROLUMINESCENCE DU PVC

RÉSUMÉ

On met en évidence le fait que l'intensité electro-luminescente du PVC dépend de la nature polaire de la substance adsorbée à l'interface cathode (PVC). Les substances polaires stimulent l'intensité de l'electro-luminicence, tandis que les substances nonpolaires la diminuent. Les résultats experimentaux sont discutés et interpretés.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara
Tom 26 (40) Fascicola 1—1981
SERIA MATEMATICĂ-FIZICĂ

„ASUPRA UNEI RELAŢII DINTRE INDICELE DE REFRACŢIE, TEMPERATURA ŞI CONCENTRAŢIA SOLUŢIILOR APOASE DE NaCl"

DE

P. CRĂCIUN, C. BUCĂ

Primită la redacţie 25 VII 1980

I. Introducere

Este ştiut că valoarea indicelui de refracţie al soluţiilor binare transparente depinde atît de temperatura soluţiei cît şi de concentraţie. Relaţiile care leagă mărimea indicelui de refracţie de concentraţie sînt liniare la multe soluţii binare [1] cînd temperatura se păstrează constantă, în timp ce. pentru o concentraţie dată, creşterea cu un grad a temperaturii produce o scădere a indicelui de refracţie.

Calculele mai precise ale indicelui de refracţie în funcţie de temperatură, pentru o soluţie de concentraţie dată, se efectuează cu ajutorul unor relaţii empirice de tipul [1] :

$$n\,(t)_c = n_0 + at + bt^2 \tag{1}$$

unde a, b — sînt constante empirice.

Valoarea indicelui de refracţie a unei soluţii aflate la temperatura constantă se calculează de obicei, pentru soluţii diluate, cu ajutorul unor relaţii empirice de forma [2] :

$$n\,(c)_t = n_0 + \mathrm{K.C} \tag{2}$$

k — fiind o constantă empirică.

Deoarece în practică se pot modifica simultan atît concentraţia cît şi temperatura unei soluţii binare, este util de a găsi relaţia cea mai adecvată care există între aceste trei mărimi.

În cele ce urmează ne propunem de a deduce o astfel de relaţie valabilă în cazul soluţiilor apoase de NaCl, pînă la concentraţia de saturaţie.

II. Partea experimentală

În vederea aflării corelaţiei ce există între indicele de refracţie (n), concentraţia (c) şi temperatura (t) a unei soluţii de NaCl în apă, s-au trasat curbele de dependenţă a indicelui de refracţie cu temperatura pentru soluţii de concentraţii diferite, cuprinse între 5% şi 30% (fig. 1).

Mărimea indicelui de refracţie s-a determinat cu un refractometru ABBE, iar temperatura s-a menţinut constantă cu ajutorul unui termostat tip U.1, între limitele 20 °C şi 60 °C, adică temperaturile cele mai uzuale în practică.

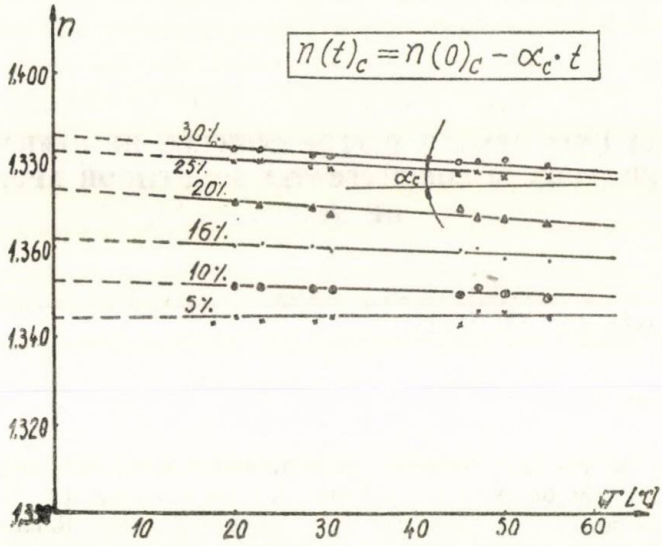


Fig. 1.

III. Prelucrarea datelor experimentale

Aşa cum se poate constata şi în fig. 1, valoarea indicelui de refracţie scade cu temperatura după o lege liniară pentru toate concentraţiile (c) folosite.

Această dependenţă se va putea scrie :

$$n\,(t)_c = n\,(o)_c - \alpha_c \cdot t \tag{3}$$

unde $n\,(0)_c$ are semnificaţia indicelui de refracţie a soluţiei de concentraţie (c) la temperatura $t=0$ °C ; α_c — panta dreptei corespunzătoare soluţiei de concentraţie (c) (vezi fig. 1).

Dacă se reprezintă $\log \alpha_c = f\,(1/c)$, curba obţinută va răspunde şi ea unei bune liniarităţi (fig. 2). Din această curbă s-a putut deduce corelaţia dintre α_c şi concentraţia (c), de forma :

$$\alpha_c = \alpha_\infty 10^{-\gamma/c} \tag{4}$$

unde α_∞ — corespunde concentraţiei c_∞ — adică de saturaţie, iar γ — panta dreptei $\lg \alpha_c = f\,(1/c)$. Din fig. 2 s-a putut calcula : $\gamma = 5{,}22\%$, iar $\alpha_\infty = 2{,}51 \cdot 10^{-4}\ \text{grad}^{-1}$.

Reprezentînd $n\,(0)_c = f\,(c)$, care figurează în relaţia (3), pentru diverse valori ale concentraţiei, se constată că punctele se aşază după o dreaptă (fig. 3) care intersectează axa ordonatelor la valoarea $n\,(0, 0) = 1{,}3345$. Aceasta are semnificaţia indicelui de refracţie al soluţiei la concentraţia : $c=0$, adică a apei pure, la temperatura $t=0$, valoare care coincide bine cu indicele de refracţie al apei la $t=0$, găsită în tabelele [2, 3].

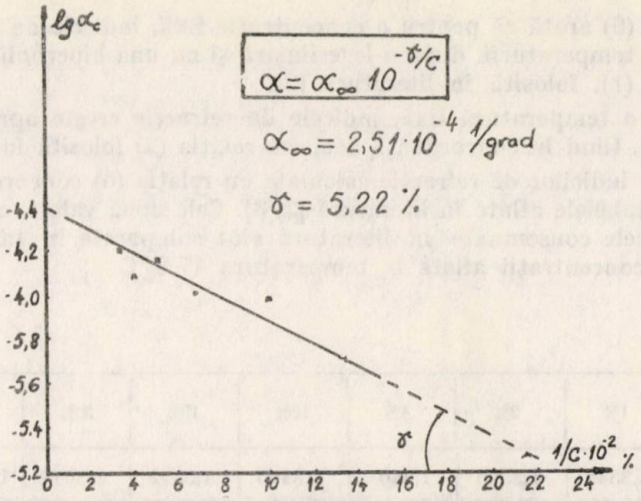


Fig. 2.

Rezultă din fig. 3 că dependenţa $b\,(c)_0 = f\,(c)$ se poate scrie analitic sub forma dreptei :

$$n\,(0)_c = n\,(0,\,0) + \beta.C. \tag{5}$$

de unde, pentru soluţiile de NaCl : $\beta = 1{,}75 \cdot 10^{-3}$ (1/%).

Ţinînd cont de relaţiile (4) şi (5) se va putea scrie valoarea indicelui de refracţie a soluţiilor apoase de NaCl în funcţie de concentraţie şi temperatură :

$$n\,(c,\,t) = n\,(0,\,0) + \beta.C. - \alpha_\infty \cdot 10^{-\gamma/c} \cdot t \tag{6}$$

sau ţinînd cont de constantele empirice găsite mai sus :

$$n\,(c,\,z) = 1{,}334 + 1{,}76 \cdot 10^{-3}\,C - 2{,}51 \cdot t \cdot 10^{-5{,}22/c} \tag{6'}$$

IV. Discuţii, concluzii

Relaţia (6) reprezintă legea de variaţie a indicelui de refracţie în funcţie atît de concentraţia NaCl în apă cît şi de temperatura soluţiei. Ea este valabilăatît la soluţiile diluate cît şi la cele concentrate, pînă la valoarea de saturaţie.

Măsurătorile experimentale care au stat la baza deducerii relaţiei (6') efectuate încadrul unui cerc ştiinţific studenţesc, au fost determinate cu un instrument care indica numai a treia zecimală. Va rezulta că şi valorile calculate cu relaţia (6) nu pot avea pretenţia unei precizii mai mari.

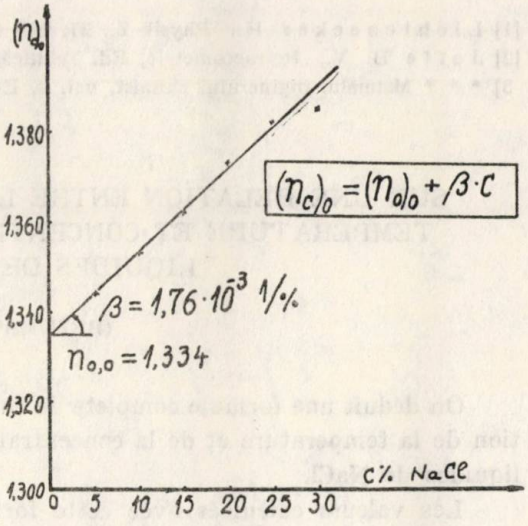


Fig. 3.

Relaţia (6) arată că pentru o concentraţie fixă, indicele de refracţie scade cu creşterea temperaturii, după o lege liniară şi nu una hiperbolică ca cea dată prin relaţie (1), folosită în literatură [2].

Pentru o temperatură fixă, indicele de refracţie creşte aproape liniar cu concentraţia, fiind în concordanţă deci, cu relaţia (2) folosită în literatură [2].

Valorile indicilor de refracţie calculate cu relaţia (6) concordă satisfăcător cu cele din tabelele aflate în literatură [2, 3]. Cele două valori, calculate ru relaţia (6) şi cele consemnate în literatură sînt comparate în tabelul I pentru mai multe concentraţii aflate la temperatura 17,5 °C.

Tabelul 1

C% / t°C	1%	2%	4%	10%	15%	20%	Observaţii
17,5	1,3349	1,3366	1,340	1,3496	1,3572	1,3644	Literatură [2, 3]
17,5	1,335	1,336	1,340	1,350	1,358	1,366	Calculaţi

În concluzie, aşa cum reiese şi din tabelul 1, formula (6) poate fi aplicată mulţumitor la calculul indicelui de refracţie al soluţiilor apoase de NaCl. pentru toate concentraţiile posibile, atunci cînd precizia cerută nu depăşeşte cea de a treia zecimală (dată de un refractometru Abbe).

Pentru valorile indicelor de refracţie determinate cu un refractometru mai precis (d.e. Pulfrich), constantele care intervin în relaţia (6) trebuiesc reevaluate printr-un procedeu identic ca cel descris mai sus.

BIBLIOGRAFIE

[1] Lichtenecker K., Physik Z., 27, 115 (1926).

[2] Joffe B. V., Refractometrie, Ed. Tehnică, Bucureşti 1958.

3] * * * Manualul inginerului chimist, vol. 2, Ed. Tehnică, Bucureşti 1952.

SUR UNE RELATION ENTRE L'INDICE DE RÉFRACTION, TEMPÉRATURE ET CONCENTRATION, DES SOLUTIONS LIQUIDES DE NaCl

(REZUMAT)

On déduit une formule complete de calcul de l'indice de réfraction en fonction de la temperature et de la concentration, valable dans le cas des solution liquides de NaCl.

Les valeurs calculeés avec cette formule concorde bien avec celles qui se trouvent dans la littérature.

I.P.B.T. — 1834/1982

BULETINUL ȘTIINȚIFIC ȘI TEHNIC
AL
INSTITUTULUI POLITEHNIC „TRAIAN VUIA"
TIMIȘOARA

SERIA MATEMATICĂ—FIZICĂ

Tom 26 (40) Fascicola 2

IULIE—DECEMBRIE
1981

COMITETUL DE REDACȚIE

Acad. prof. dr. doc. ing. IOAN ANTON, Prof. dr. ing. GHEORGHE CREȚU. Prof. em. dr. doc. ing. GHEORGHE SILAȘ – redactor șef, Prof. em. ing. CONSTANTIN AVRAM, m.c. al Acad. R.S.R., Prof. dr. ing. DUMITRU BECHERESCU, Prof. dr. ing. VASILE COCHECI, Prof. dr. BORISLAV CRSTICI, Prof. dr. ing. COLETA DE SABATA, Prof. dr. ing. TOMA DORDEA. Prof. dr. ing. TRAIAN NICOARĂ, Prof. dr. ing. FRANCISC KOVACS, Acad. prof. dr. ing. DAN MATEESCU, Prof. dr. ing. TIBERIU MUREȘAN, Prof. dr. ing. IOAN NIȚA, Prof. em. dr. ing. GHEORGHE SAVII Prof. dr. doc. ing. CONSTANTIN ȘORA, Prof. dr. ing. LIVIU BRÎNDEU – secretar de colegiu

COMITETUL DE REDACȚIE

I. *Matematică-fizică*

Prof. dr. BORISLAV CRSTICI – redactor responsabil, Prof. dr. ing. COLETA DE SABATA, Prof. dr. ing. MARIUS BORNEAS – red. resp. adj., Prof. dr. OCTAV E. GHEORGHIU, Conf. dr. EUGEN BURLACU – secretar de redacție

BULETINUL ŞTIINŢIFIC ŞI TEHNIC
AL
INSTITUTULUI POLITEHNC „TRAIAN VUIA" TIMIŞOARA
Tomul 26 (40) Fasc. 2. Iulie-Decembrie 1981

MATEMATICĂ—FIZICĂ

Dorina Rendi, B. Rendi — Structuri diferenţiale şi spaţii tangente II 7

Dorina Rendi, B. Rendi — Coomologia spaţiilor diferenţiale 11

F. Smarandache — Baze de soluţii pentru congruenţe liniare 13

Carmencita Uroşu — Congruenţe compacte decompozabile pe produse directe 17

Carmencita Uroşu — Asupra unei condiţii de tip Malţev pe algebre universale 21

H. Ludescher, E. Rovenţa — Integrale nedefinite pe mulţimi Fuzzy 23

O. Lipovan — Asupra convergenţei şirurilor de funcţii multivoce 29

A. Lupaş, C. Manole — O proprietate a polinoamelor lui S.N. Bernstein 33

Gh. Atanasiu, F. Klepp — Tensori invarianţi la transformări de conexiuni Finsler aproape complexe 37

T. Bânzaru, N. Crivăţ — Asupra aplicaţiilor multivoce aproape periodice cu valori în spaţii uniforme 47

B. G. Pachpatte — Asupra unei familii de aplicaţii contractive 53

Coleta de Sabata, C. Marcu — Dependenţa de grosime a structurii de domenii la păturile groase de 90 % Co şi 10 % Ni 61

Coleta de Sabata, Dorothea Mihailovici, Rada Baea, I. Luminosu, Mariana Gangăl — Utilizarea energiei solare pentru încălzirea bitumului în rezervoare cilindrice de mare capacitate 65

M. Borneas, I. Miron, I. Damian, — Asupra unei noi mecanici pentru sisteme microscopice 73

BULETIN SCIENTIFIQUE ET TECNHIQUE
DE
L'INSTITUT POLYTECHNIQUE „TRAIAN VUIA" TIMIŞOARA

Tome 26 (40) Fasc. 2 Juillet-Décembre, 1981

MATEMATIQUE—PHYSIQUE

Dorina Rendi, B. Rendi — Differential structures and tangent spaces II 7

Dorina Rendi, B. Rendi — The conomology of differential spaces 11

F. Smarandache — Bases of solutions for the lineal congruences 13

Carmencita Uroşu — Congruences compactes decomposables sur produits directs 17

Carmencita Uroşu — Sur une conditions de typ Maltev des algèbres universelles 21

N. Ludescher, E. Roventa — Indefinite integrals on Fuzzy sets 23

O. Lipovan — Sur la convergence des suites de fonctions multivoqués .. 29

A. Lupaş, C. Manole — Une propriété des polynomes de Bernstein 33

Gh. Atanasiu, F. Klepp — Invariant tensors for transformations of almost complex finsler connections..... 37

T. Bânzaru, N. Crivăţ — On almost-periodicity for multifunctions with values in uniform spaces 47

B.G. Pachpatte — On a family of contractive maps 53

Coleta de Sabata, C. Marcu — La structure magnétique des couches électrolytiques de 90% Co 10% Ni comme fonction de l'épaisseur 61

Coleta de Sabata, Dorothea Mihailovici, Rada Baea, I. Luminosu, Mariana Gangăl — L'utilisation de l'énergie solaire pour le chauffage du bitume dans des réservoires de grande capacité 65

M. Borneas, I. Miron, I. Damian — On a new mechanics for microscopic systems 73

PROFESORUL *OCTAVIAN GHEORGHIU* LA 60 DE ANI

La 20 iulie 1981 tovarășul profesor Octavian Gheorghiu a împlinit 60 de ani de viață rodnică. Mai mult de jumătate din acești ani a activat la Institutul politehnic „Traian Vuia" din Timișoara, începînd din anul 1949. Printre profesorii activi din Institut în momentul de față, are cel mai lung stagiu în grad de profesor : 30 de ani (începînd din 1951). Jubileul tov. prof. Octavian Gheorghiu oferă o ocazie potrivită colegilor săi din comitetul de redacție al Buletinului științific și tehnic, Seria matematică-fizică, de a-i aduce un omagiu fierbinte, la care se alătură întregul colectiv al catedrei de matematici.

Prof. Octavian Gheorghiu *s-a născut la 20 iulie 1921 în satul Parcheș, actualmente aparținînd de comuna Somova, jud. Tulcea. Tatăl său a fost învățător. Liceul l-a absolvit la Tulcea în anul 1940. A făcut studiile de matematică la Universitatea din București, avîndu-i ca profesori pe Dan Barbilian, Gheorghe Vrănceanu, Miron Nicolescu, Grigore Moisil. Încă în timpul studenției a fost numit preparator la Universitatea din București, iar după luarea licenței în matematici tot aici asistent la catedra profesorului Grigore Moisil. În anul 1949 a fost numit conferențiar la Institutul politehnic din Timișoara, unde activează și în prezent avînd grad de profesor începînd cu anul 1951. În perioada 1961—1973 a îndeplinit funcția de șef al catedrei de matematici, organizînd și conducînd activitatea de cercetare științifică și de perfecționare didactică a membrilor acestei catedre. Începînd cu anul 1970 este conducător de doctoranzi în cadrul Universității din Timișoara, promovînd pînă în prezent un însemnat număr de doctori în matematici. Pentru activitatea sa deosebită a fost distins cu ordinul „Meritul cultural". Cursul său de Geometrie analitică și diferențială, editat de Editura Didactică și Pedagogică în 1968, a obținut premiul Ministerului Educației și Învățămîntului.*

Este imposibil ca în spațiul restrîns al unei note omagiale să redăm toate aspectele activității bogate a prof. Octavian Gheorghiu. Simpla înșirare a lucrărilor științifice ale sărbătoritului nostru (peste 100 de lucrări) ar necesita mai multe pagini. În această situație ne vom opri ceva mai mult asupra activității științifice a prof. Gheorghiu din prima perioadă a activității sale de cercetare, perioadă care în general a fost consacrată studiului obiectelor geometrice. Prin venirea prof. Octavian Gheorghiu la Institutul politehnic din Timișoara, acesta a ajuns să fie unul din centrele de cercetări științifice în domeniul obiectelor geometrice, rezultatele prof. Gheorghiu fiind citate în monografii de mare prestigiu, cum ar fi „Ricci-Calculus" de J.A Schouten (Springer Berlin 1954), și fiind folosite în elaborarea unor teze de doctorat în acest domeniu, cum este cazul lui Albert Nijenhuis din Amsterdam (1952). Numeroși matematicieni din toată lumea solicită legături cu prof. Gheorghiu, printre care menționăm pe S. Golab (Cracovia),

J. Aczel (Debrecen, R.P.U.), A. Moór (R.P.U), M. Kucharzewski (Katowice, R.P. Polonă) și alții. Pînă la venirea prof. Octavian Gheorghiu la Timișoara, cercetările de geometrie din Institutul nostru au fost încă puternic dominate de concepția despre geometrie ca fiind teoria invarianților grupurilor de transformări, concepție ce-și are originea în celebra Programă de la Erlangen din 1870 a lui Felix Klein, parțial și de noua concepție despre geometrie care rezulta din generalizările acestei Programe, întreprinse de J.A. Schouten și Elie Cartan. Teoria obiectelor geometrice ale cărei baze au fost puse de O. Veblen și J.H.C. Whitehead în 1931, s-a dovedit un aparat eficient pentru studii de geometrie diferențială a spațiilor cu grupuri fundamentale, dar în același timp și a spațiilor generalizate (spații fibrate, spații cu conexiune, varietăți diferențiale înzestrate cu structuri geometrico-diferențiale. (Meritul profesorului Gheorghiu este că a participat activ la cercetări de teoria obiectelor geometrice într-o perioadă cînd această teorie a fost un domeniu de cercetare foarte modern, în care încă lipseau mari lucrări de sinteză, obținînd rezultate care au fost remarcate în lumea matematicienilor. Tema tezei de doctorat a prof. Octavian Gheorghiu este de asemenea din domeniul teoriei obiectelor geometrice. Cercetarea matematică din Institutul politehnic Timișoara a fost în perioada în care prof. Octavian Gheorghiu s-a ocupat de teoria obiectelor geometrice (1949—1963) inclusă direct în cercetarea matematică mondială din acest domeniu. Acest fapt constituie un imbold în muncă pentru toți membrii catedrei de matematici, care urează profesorului lor stimat cu ocazia jubileului de 60 de ani multă sănătate și putere de muncă, multe alte jubilee viitoare, care ne vor da ocazia să vorbim și despre alte domenii ale activității sale științifice (îndeosebi despre ecuațiile funcționale), precum și despre alte laturi ale bogatei sale activități.

COMITETUL DE REDACȚIE.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara

MATEMATICĂ—FIZICĂ

Tom. 26 (40) **Fascicola 2**

STRUCTURI DIFERENŢIALE ŞI SPAŢII TANGENTE (II)

DE

D. RENDI ŞI B. RENDI

Primită la redacţie 14. III. 1980.

Se ştie [3] că dacă se defineşte noţiunea de vector tangent în origine cu ajutorul algebrei

$$\Omega_2 = \{f \mid f \in \Omega, \quad f(0) = f'(0) = 0\}$$

unde Ω este mulţimea funcţiilor analitice pe o vecinătate a originii, ca fiind o aplicaţie

$$X : \Omega_2 \to R$$

cu proprietăţile

$$1^\circ \; X(\lambda f + \mu g) = \lambda X(f) + \mu X(g)$$

$$2^\circ \; X(fg) = f(0) \cdot X(g) + g(0) \cdot X(f)$$

atunci mulţimea vectorilor tangenţi în origine formează un spaţiu liniar bidimensional.

Dacă considerăm Ω mulţimea funcţiilor analitice pe $\mathbf{R}$ şi $\Omega_2 \subset \Omega$ subalgebra pentru care are loc $f \in \Omega_2 \Leftrightarrow f(0) = f'(0) = 0$ atunci cu definiţia de mai sus a vectorului tangent obţinem în origine un spaţiu liniar bidimesnional ca spaţiu tangent, iar în restul punctelor spaţiul tangent va fi unidimensional.

Se observă că singurele cîmpuri continue de vectori tangenţi sînt acele cîmpuri care se anulează în origine. O astfel de structură diferenţială este oarecum patologică, originea de fapt fiind o singularitate structurală a spaţiului diferenţial $\mathbf{R}$. În dorinţa de a obţine o structură diferenţială regulată vom proceda în felul următor :

Peste $\mathbf{R}$ considerăm fibrarea trivială cu fibra tip Ω, astfel un element al fibratului este $(t, \Sigma a_i x^i)$. Pentru $t_0 \in \mathbf{R}$ pe o vecinătate a lui t_0 considerăm secţiuni de forma

$$s_f : (\alpha, \beta) \to \Omega$$

$$s_f(t)(x) = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{f^{(i)}(t)}{i!} (x-t)^i \quad \text{(adică } a_0 = a_1 = 0\text{)}.$$

Evident această secţiune este de clasă C^∞, chiar analitică. Mulţimea acestor secţiuni în orice punct formează o algebră, de fapt cu ajutorul acestor secţiuni construim un fascicol peste $\mathbf{R}$, fascicol cu fibra tip Ω_2 în orice punct.

Se observă că nu s-au luat secţiuni în fascicolul funcţiilor analitice peste $\mathbf{R}$, ci peste un fibrat cu fibra tip funcţii analitice pe R. Notăm acest fascicol prin (R, S_{Ω_2}).

Vom putea defini noțiunea de vector tangent în $t \in \mathbf{R}$ ca fiind aplicația $X_t : S_{\omega_2}(t) \to \mathbf{R}$ ce satisface 1°, 2°

$$S_{\Omega_2}(t) = \{s_f \mid s_f : (t-\delta,\ t+\delta) \to \Omega_2,$$

$$s_f(t) = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{f^{(i)}(t)}{i!} (x-t)^i,\ f \in \Omega_2\}.$$

Evident în proprietățile 1°, 2° funcțiile f și g se înlocuiesc prin secțiunile s_f, $s_g \in S_{\Omega_2}(t)$.

Se verifică imediat că are loc.

Propoziția 1°. Spațiul tangent la R în orice punct $t \in R$ este bidimensional, T_t.

Fie

$$Ts_{\Omega_2} = \{(t, T_t)/t \in R\}.$$

Putem acum reformula definiția structurii diferențiale.

Definiție. Ansamblul (R, S, Ts_{Ω_2}) se numește structură diferențială pe R iar R spațiul diferențial.

Observații.

1) În loc de Ω_2 se poate considera

$$\Omega_k = \{f \mid f \in \Omega,\ f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(k-1)}(0) = 0\}$$

și se obține în orice punct $t \in R$ un spațiu tangent de dimensiune k.

2) Dacă $f(x) = \sum_{i=2}^{\infty} a_i x^i$, atunci pentru orice aplicație $X : \Omega_2 \to \mathbf{R}$ cu 1°, 2° corespunde o pereche de numere reale (α, β) astfel încît $X(f) = \alpha_{a2} + \alpha_{a3}$, adică

$$X(f) = \alpha \frac{f''(0)}{2!} + \frac{\beta}{3!} f'''(0).$$

Acest rezultat este valabil și pentru

$$X_t : S_{\omega_2}(t) \to R$$

ce satisface 1°, 2° adică $\exists\ \alpha, \beta \in R$

$$X_t(s_f) = \frac{\alpha}{2!} f''(t) + \frac{\beta}{3!} f'''(t)$$

În continuare se observă că pentru orice $t \in R$ putem considera $\Omega_{2,t}$ mulțimea funcțiilor analitice pe o vecinătate a lui T. Fie f o astfel de funcție. Se poate defini

$$s_f(t) = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{f^{(i)}(t)}{i!} (x-t)^i \tag{1}$$

În acest caz obținem un fascicol de secțiuni peste R dar secțiunile sînt secțiuni locale pe cînd în construcția inițială am avut secțiuni globale, funcțiile $f \in \Omega_2 \subset \Omega$ fiind analitice peste tot pe R.

Mai precis să considerăm fibratul netrivial (doar local trivial) peste R, fibra tip în $t \in R$ fiind $\Omega_{2,t}$. Considerăm secțiunile locale (1) și fascicolul acestor secțiuni. În fiecare punct $t \in R$ fibra tip este o algebră, peste această algebră

considerăm aplicațiile X_t cu proprietățile 1°, 2°. Se obțin spații tangente bidimensionale în orice punct $t \in R$. Ușor se arată că pentru orice X_t există $\alpha, \beta \in R$ astfel ca

$$X_t(s_f) = \frac{\alpha}{2!} f''(t) + \frac{\beta}{3!} f'''(t).$$

BIBLIOGRAFIE

[1] G. de Rham, Variétés différentiables, Hermann, Paris 1965.
[2] D. I. Papuc, Elemente de geometrie diferențială globală, Editura did. și ped., București, 1970.
[3] B. Rendi, Structuri diferențiale și spații tangente I (va apare).

DIFERENTIAL STRUCTURES AND TANGENT SPACES II

In this paper particular sheaves of sections are considered and the correspondent tangent spaces are constructed for R.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara

MATEMATICĂ—FIZICĂ

Tom. 26 (40) **Fascicola 2**

COOMOLOGIA SPAŢIILOR DIFERENŢIALE

DE

D. RENDI ŞI B. RENDI

În semn de omagiu profesorului Oct. Em. Gheorghiu la a 60-a aniversare.

Primită la redacţie 14.III.1980.

Considerăm $\mathbf{R}$ mulţimea numerelor reale. Pentru $t_0 \in \mathbf{R}$ fie $\Omega_{2,t}$ mulţimea funcţiilor analitice pe o vecinătate a lui t_0 cu $f(t_0)=f'(t_0)=0$. Pentru $f \in \Omega_{2,t_0}$ $f:(t_0-\delta,\ t_0+\delta) \to \mathbf{R}$ considerăm secţiunea s_f în fibratul $F=\{(t,\ \Omega_{2,t})/t \in \mathbf{R}\}$ definită prin

$$s_f(t)(x)=\sum_{i=2}^{\infty} \frac{f^{(i)}(t)}{i!}(x-t)^i$$

Construim fascicolul acestor secţiuni. În fiecare punct $t_0 \in \mathbf{R}$ fibra tip a fascicolului este o algebră (elementele sînt secţiuni locale definite pe anumite vecinătăţi ale lui $t_0 \in \mathbf{R}$) notată cu $S_{\Omega_2}(t_0)$. Vectorul tangent în t_0 a fost definit [4] ca fiind o aplicaţie

$$X_{t_0}: S_{\Omega_2}(t_0) \to \mathbf{R}$$

care satisface

1°) $X_{t_0}(\lambda_{s_f}+\mu s_g)=\lambda X_{t_0}(s_f)+\mu X_{t_0}(s_g)$

2°) $X_{t_0}(s_f \cdot s_g)=s_f(t_0)\cdot X_{t_0}(s_g)+s_g(t_0)\cdot X_{t_0}(s_f)$

S-a văzut că mulţimea vectorilor tangenţi este un spaţiu liniar bidimensional în orice punct $t \in \mathbf{R}$. De fapt pentru orice X_t vector tangent la $\mathbf{R}$ în t corespunde $(\alpha,\ \beta) \in \mathbf{R}^2$ astfel încît

$$X_t(s_f)=\alpha \cdot \frac{f''(t)}{2!}+\beta \frac{f'''(t)}{3!}$$

Fie $X_t^{(1)}$ acel vector tangent în t pentru care $X_t^{(1)}(s_f)=\frac{f''(t)}{2}$ iar $X_t^{(2)}$ vectorul tangent definit prin

$$X_t^{(2)}(s_f)=\frac{f'''(t)}{3!}$$

Se observă că $X_t^{(1)}$ şi $X_t^{(2)}$ formează o bază pentru spaţiul tangent în t. Fie $dX_t^{(1)}$ şi $dX_t^{(2)}$ baza duală.

Definiţie. i) Printr-o 0-formă definită pe o vecinătate a lui $t_0 \in \mathbf{R}$ vom înţelege funcţia $\omega_0=s_f(t_0):(t_0-\delta,\ t_0+\delta) \to \mathbf{R}$ generată de $f:(t_0-\delta,\ t_0+\delta) \to \mathbf{R}$, $f \in \Omega_{2,t_0}$.

ii) Printr-o 1-formă definită pe o vecinătate a lui t_0 vom înţelege în fiecare punct $t \in (t_0-\delta,\ t_0+\delta)$ o aplicaţie liniară a spaţiului tangent, notată

$$\omega_1=s_f(t_0)\cdot dX^1+s_g(t_0)\cdot dX^2$$

iii) Printr-o 2-formă se va înțelege o aplicație biliniară, antisimetrică a spațiului tangent în fiecare punct $t \in (t_0-\delta,\ t_0+\delta)$ notată

$$\omega_2 = s_f(t_0)\, dX^1 \wedge dX^2$$

Dacă în $t \in (t_0-\delta,\ t_0+\delta)$ luăm vectorii tangenți

$$X_t = \alpha X_t^1 + \beta X_t^2, \quad Y_t = a \cdot Y_t^1 + b \cdot Y_t^2$$

atunci

$$\omega_1(X_t) = s_f(t_0)(t)\,\alpha + s_g(t_0)(t)\cdot\beta$$
$$\omega_2(X_t, Y_t) = s_f(t_0)(t)(\alpha b - a\beta)$$

Avînd definiția locală se poate trece la o privire globală pentru aceste noțiuni.

Definim operatorul de derivare

$$d\omega_0 = d(s_f(t_0)) = (x-t_0)^2 [s_f(t_0)(x)]'' dX^1 + (x-t)^3 [s_f(t_0)(x)]''' dX^2$$
$$d\omega_1 = \{(x-t_0)^2 [s_g(t_0)(x)]'' - (x-t_0)^3 [s_f(t_0)\alpha]'''\}\, dX^1 \wedge dX^2$$
$$d\omega_2 = 0$$

Se verifică ușor că $d \cdot d = 0$. Se notează $\bigwedge^i$ mulțimea i-formelor. Avem

$$0 \xrightarrow{d_0} \bigwedge^0 \xrightarrow{d_1} \bigwedge^1 \xrightarrow{d_2} \bigwedge^2 \xrightarrow{d_3} 0$$

d_i – operator de derivare. Avem deci

$$Im\, d_1 \subset Ker\, d_2, \quad Im\, d_0 = \{0\} \qquad Ker\, d_3 = \bigwedge^3$$

Pentru calculul grupurilor de coomologie calculăm $Ker\, d_i$ și $Im\, d_i$.

Luăm $t_0 = 0$. Avem

$$\bigwedge^0 = \{s_f(0)(x) = f(x) / f \in \Omega_{2,0}\}$$
$$\bigwedge^1 = \{f_1(x)\, dX^1 + f_2(x)\, dX^2 / f_1, f_2 \in \Omega_{2,0}\}$$
$$\bigwedge^2 = \{f(x)\, dX^1 \wedge dX^2 / f \in \Omega_{2,0}\}$$

Pentru $\omega_0 = f$ avem

$$d_1(\omega_0) = x^2 f''(x)\, dX^1 + f'''(x)\, dX^2$$
$$Ker\, d_1 = \{f / f \in \Omega_{2,0},\ f''(x) = f'''(x) = 0\} = \{f / f(x) \equiv 0\}$$

Deci $Ker\, d_1 = \{0\}$ și astfel $H^0 = \{0\}$

$$Im(d_1) = \{x^2 f''(x)\, dX^1 + x^3 f'''(x)\, dX^2\}$$

Pentru a calcula $Ker\, d_2$, fie $\omega = f_1(x)\, dX^1 + f_2(x)\, dX^2$. Avem $d\omega = 0$ deci $x^2 f_2'' = x^3 f_1'''$. Deci avem $f_2 = x f_1' - 2 f_1$

$$Ker\, d_2 = \{f_1(x)\, dX^1 + (x f_1' - 2 f_1)\, dX^2\}$$

Dacă alegem

$$f_1(x) = x^2 f''(x), \quad f_2(x) = x^3 f'''(x)$$

atunci avem și numai atunci că $f_2 = x f_1' - 2 f_1$. Astfel $Ker\, d_2 = Im\, d_1$ deci $H^1 = \{0\}$. Cum d_2 este surjecție rezultă că $H^2 = 0$, deci toate grupurile de coomologie ale spațiului diferențial R sînt triviale.

BIBLIOGRAFIE

[1] G. de Rham, Variétés différentiales. Hermann, Paris, 1965.
[2] D. I. Papuc, Geometrie diferențială globală, Ed. did. și ped., 1970.
[3] B. Rendi, Structuri diferențiabile și spații tangente I (Va apare).
[4] D. Rendi, B. Rendi, Structuri diferențiabile și spații tangente II. (va apare).

THE COHOMOLOGY OF DIFFERENTIAL SPACES

Using the cotangent bundle constructed in [3, 4] the corresponding cohomology groups are calculated for R.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara

MATEMATICĂ—FIZICĂ

Tom. 26 (40) Fascicola 2

BAZE ŞI SOLUŢII PENTRU CONGRUENŢE LINIARE

DE

FLORENTIN GH. SMARANDACHE

În semn de omagiu profesorului Oct. Em. Gheorghiu la a 60-a aniversare.

Primită la redacţie 11.X.1980.

În acest articol se stabilesc cîteva proprietăţi legate de soluţiile unei congruenţe liniare, baze de soluţii pentru o congruenţă liniară şi determinarea celorlalte soluţii pornind de la aceste baze.

Lucrarea are ca scop generalizarea unor teoreme referitoare la congruenţe din materialele prezentate la bibliografie introducerea unor termeni noi, ajungînd în final la elaborarea unei metode de rezolvare a congruenţelor.

1. Noţiuni introductive

Definiţia 1. Se numeşte *congruenţă liniară cu n necunoscute* (*congruenţă liniară*) o congruenţă de forma : $a_1x_1+\ldots+a_nx_n\equiv b \pmod m$, unde $a_1, \ldots a_n$, b, $m\in Z$, $n\geqslant 1$; (1).

Se cunosc următoarele teoreme :

Teorema 1. Congruenţa liniară (1) are soluţii dacă şi numai dacă $(a_1, \ldots, a_n, m)/b$.

Teorema 2. Congruenţa liniară $ax\equiv b \pmod m$, $m\neq 0$ cu $(a, m)=d/b$ are d soluţii distincte şi dacă x_0 este o soluţie a congruenţei, atunci $x_0+\frac{m}{d}\cdot r$, $r=0, 1, \ldots, d-1$ sînt toate soluţiile distincte ale ei (vezi [1], pp. 18—20).

Definiţia 2. Două *soluţii* $x^0=(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ şi $x^1=(x_1^1, \ldots, x_n^1)$ ale congruenţei liniare (1) sînt distincte (diferite) dacă $\exists\, i\in\{1, 2, \ldots n\}$ astfel încît $x_i^0\not\equiv x_i^1 \pmod m$.

Teorema 3. Congruenţa liniară (1) cu $m\neq 0$ şi $(a_1, \ldots, a_n, m)=d/b$ are $d\cdot|m|^{n-1}$ soluţii distincte.

2. Definiţii, teoreme şi proprietăţi asupra congruenţelor

În cele ce urmează vom da o generalizare a teoremei 2 pentru congruenţele liniare cu n necunoscute, $n\geqslant 1$, generalizare pe care o vom cuprinde în mai multe propoziţii. Dar pentru aceasta vom introduce cîteva noţiuni noi şi vom stabili proprietăţile lor.

Se fac cîteva ipoteze nerestrictive ; se presupune $m>0$ deoarece are loc echivalenţa : $a\equiv b \pmod m \Leftrightarrow a\equiv b \pmod m$ iar cazul $m=0$ reduce congruenţa la egalitate. De asemenea, se alege c, m, m, d, c al numerelor ea fiind pozitiv (vezi [1], pp. 10—14 şi [2] pp. 65).

Lema 1. Dacă $a_1, \ldots, a_n, m \in Z$ atunci $[(a_1, \ldots, a_n, m) \cdot m^{n-1}]/[(a_1, m) \ldots (a_n, m)]$ este număr întreg.

Demonstrația se face prin inducție după $n \in N^*$.

Teorema 4. Dacă $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ constituie o soluție (particulară) a congruenței liniare (1) atunci ;

$$(*)\begin{cases} x_1 = x_1^0 + [m/(a_1, m)] \cdot t_1,\ 0 \leqslant t_1 < (a_1, m),\ t_1 \in N \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = x_n^0 + [m/(a_n, m)] \cdot t_n,\ 0 \leqslant t_n < (a_n, m),\ t_n \in N \end{cases}$$

constituie $(a_1, m) \ldots (a_n, m)$ soluții distincte ale congruenței inițiale.

Demonstrație. Deoarece modulul congruenței (m) se subînțelege l-am omis.

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = (a_1x_1^0 + \ldots + a_nx_n^0) + \sum_{i=1}^{n} [a_i m/(a_i, m)]\, t_i \equiv b + 0$$

(mod m) pentru că

$$[(a_i \cdot m)/(a_i, m)] \cdot t_i =]a_i, m] \cdot t_i \equiv 0 \pmod{m},\ \forall\, t_i \in Z.$$

De asemenea $x_i^0 + [m/(a_i, m)]\,\alpha \not\equiv x_i^0 + [m/(a_i, m)] \cdot \beta \pmod{m}$ pentru α și β numere naturale $0 \leqslant \alpha,\ \beta < (a_i, m)$ și $\alpha \neq \beta$ deoarece mulțimea : $\{[m/(a_i, m)] \cdot t_i \mid 0 \leqslant t_i < (a_i, m),\ t_i \in N\} \subseteq \{0, 1, \ldots, m-1\}$ care constituie un sistem complet de resturi modulo m, iar $[m/(a_i, m)] \cdot \alpha \neq [m/(a_i, m)] \cdot \beta$ pentru α și β anterior definiți.

Se consideră Z – modulul A generat de vectorii :

$$V_i^t = (0, \ldots, 0, \underbrace{m/(a_i, m)}_{\text{locul } i}, 0, \ldots, 0),\ i = \overline{1, n}$$

din Z^n. Modulul A are rangul n $(n \geqslant 1)$. Se mai scrie $A = \{V_1, \ldots, V_n\}$.

Se introduc cîțiva termeni noi.

Definiția 3. Două *soluții* (vectori soluție) X° și Y° ale congruenței liniare (1) se numesc *soluții independente* dacă $X^\circ - Y^\circ \notin A$. În caz contrar se numesc soluții dependente.

Observația 1. Cu alte cuvinte : dacă X° este o soluție a congruenței (1), atunci soluția Y° a acestei congruențe este dependentă cu ea dacă se obține din X° prin aplicarea formulei (*) pentru anumite valori ale parametrilor $t_1, \ldots, t_n$.

Definiția 4. Soluțiile $X^1, \ldots, X^h$ ale congruenței (1) se numesc *independente (între ele)*, dacă ele sînt independente două cîte două. În caz contrar se numesc *soluții dependente între ele* .

Definiția 5. Soluțiile $x^1, \ldots, x^h$ ale congruenței (1) constituie o *bază* pentru această congruență, dacă $x^1, \ldots, x^h$ sînt independente între ele și cu ajutorul lor se pot obține, toate soluțiile (distincte) ale congruenței prin procedeul (*) parametrizînd pe $t_1, \ldots, t_n$.

Exemplul 1. Fie congruența liniară neomogenă $2x - 6y \equiv 2 \pmod{12}$. Ea are $(2, 6, 12) \cdot 12^{2-1} = 24$ soluții distincte. Dacă x_1 și y_1 constituie o soluție particulară, formula (*) se scrie :

$$\begin{cases} x \equiv x_1 + 6t_1,\ 0 \leqslant t_1 < 2,\ t_1 \in N \\ y \equiv y_1 + 2t_2,\ 0 \leqslant t_2 < 6,\ t_2 \in N \end{cases}$$

iar $V_1 = \binom{6}{0}$, $V_2 = \binom{0}{2}$ și $A = \{V_1, V_2\} = \{(6t_1, 2t_2)^t / t_1, t_2 \in Z\}$, soluțiile $x=7$, $y=4$ și $x=1$, $y=0$ sînt dependente fiindcă:

$$\binom{7}{4} - \binom{1}{0} = \binom{6}{4} = 1 \cdot \binom{6}{0} + 2\binom{0}{2} \in A$$

Dar $\binom{4}{1}$ este independentă cu $\binom{1}{0}$ deoarece $\binom{4}{1} - \binom{1}{0} = \binom{3}{1} \neq t_1\binom{6}{0} + t_2\binom{0}{2}$ cu $t_1, t_2 \in Z$, deci $\binom{3}{1} \notin A$.

Cîteva proprietăți ale soluțiilor congruențelor liniare

Fie congruența liniară (1).

1) Dacă soluția x^1 este independentă cu soluția x^2 atunci și soluția x^2 este independentă cu x^1.

Într-adevăr din $x^1 - x^2 \notin A$ rezultă $x^2 - x^1 = -1 \cdot (x^1 - x^2) \notin A$ deoarece A este un Z-modul.

2) x^1 nu este independentă cu x^1, deoarece $x^1 - x^1 = 0_n \in A$.

3) x^1 independent cu x^2 și x^2 independent cu x^3 nu implică x^1 independent cu x^3 (relația nu este tranzitivă).

Contraexemplu

În exemplul anterior, $\binom{1}{0}$ este independent cu $\binom{4}{1}$ și $\binom{4}{1}$ este independent cu $\binom{7}{4}$ deoarece $\binom{4}{1} - \binom{7}{4} = \binom{-3}{-3} \notin A$ dar $\binom{1}{0}$ nu este independent cu $\binom{7}{4}$.

4) Dacă X este independent cu Y, atunci X este independent cu toate soluțiile congruenței care sînt dependente cu Y.

Într-adevăr, dacă Y_1 este dependent cu Y atunci $X - Y_1 = \underbrace{(X - Y)}_{\notin A} + \underbrace{(Y - Y_1)}_{\in A} = W$. Presupunem prin absurd că $W \in A$, atunci rezultă $(X - Y) = W - (Y - Y_1) \in A$ deoarece A este un Z-modul. Dar $(X - Y) \notin A$ din ipoteză. Deci $X - Y_1 \notin A$.

Teorema 5. O congruență liniară (1) are baza formată din $(a_1, \ldots, a_n, m) \cdot m^{n-1}/(a_1, m) \cdot \ldots \cdot (a_n, m)$ soluții.

Demonstrație. Notăm $P_1 = (a_1, \ldots, a_n m) \cdot m^{n-1}$ și $P_2 = (a_1, m) \cdot \ldots \cdot \ldots \cdot (a_n, m)$.

Din lema 1 și cum $P_1 > 0$, $P_2 > 0$ rezultă $P_1/P_2 \in N^*$ deci are sens teorema. P_1 reprezintă numărul de soluții distincte (în total) ale congruenței (1), datorită teoremei 3. P_2 reprezintă numărul de soluții distincte obținute pentru congruența (1) prin aplicarea formulei (procedeului) (*) unei singure soluții particulare a congruenței (din teorema 4). Deci trebuie să aplicăm de cel puțin P_1/P_2 procedeul (*) pentru a obține toate soluțiile congruenței, adică este nevoie de P_1/P_2 soluții particulare independente ale congruenței. Astfel baza are P_1/P_2 soluții.

3. O metodă de rezolvare a congruențelor liniare

Acest paragraf își propune să valorifice rezultatele obținute înainte.

Fie congruența liniară (1) cu $(a_1, \ldots, a_n, m) = d/b$, $m \neq 0$.

— se determină numărul soluțiilor distincte ale congruenței: $P_1 = d \cdot |m|^{n-1}$

— se determină numărul soluțiilor din bază:

$$S = P_1/[(a_1, m) \cdot \ldots \cdot (a_n, m)]$$

– se construiește Z-modulul A :

$$A=\{V_1, \ldots, V_n\}, \text{ cu } V_i^t=(0, \ldots, 0, m/(a_i, m), 0, \ldots, 0),$$

componenta diferită de zero fiind pe locul i, $1 \leqslant i \leqslant n$.

– se caută S soluții independente între cele ale congruenței

– se aplică formula (*) astfel :

$$\begin{cases} x_1 \equiv x_1^k + [m/(a_i, m)] \cdot t_1, \ 0 \leqslant t_1 < (a_1, m), \ t_1 \in N. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n \equiv x_n^k + [m/(a_n, m)]\, t_n, \ 0 \leqslant t < (a_n, m), \ t_n \in N \end{cases}$$

modulul fiind m, pentru $k=1, 2, \ldots, S$, unde $X^1=(X_1^1, \ldots, X_n^1), \ldots, X^s=(X_1^s, \ldots, X_n^s)$ sînt cele S soluții independente din bază ; dînd toate sistemele posibile de valori parametrilor $t_1, \ldots, t_n$ se obține toate soluțiile distincte ale congruenței.

Corectitudinea metodei rezultă din teoremele anterioare.

Aplicație. Reluăm congruența liniară din exemplul 1, care știm că are 24 soluții distincte. Baza va avea : $24/[(2, 12)\cdot(6, 12)]=2$ soluții. Am văzut că $\binom{1}{0}$ este independent cu $\binom{4}{1}$.

Deci cele 24 soluții ale congruenței se obțin din

$$\begin{cases} x \equiv 1+6t_1, & 0 \leqslant t_1 < 2, \ t_1 \in N \\ y \equiv 0+2t_2 & 0 \leqslant t_2 < 6, \ t_2 \in N \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} x \equiv 4+6t_1, & 0 \leqslant t_1 < 2, \ t_1 \in N \\ y \equiv 1+2t_2, & 0 \leqslant t_2 < 6, \ t_2 \in N \end{cases}$$

prin parametrizarea $(t_1, t_2) \in \{0, 1\} \times \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

$$\begin{cases} x \equiv 1+6t_1 \\ y \equiv 0+2t_2 \end{cases} \Rightarrow \quad \binom{1}{0}, \binom{1}{2}, \binom{1}{4}, \binom{1}{6}, \binom{1}{8}, \binom{1}{10};$$

$$\binom{7}{0}, \binom{7}{2}, \binom{7}{4}, \binom{7}{6}, \binom{7}{8}, \binom{7}{10};$$

$$\begin{cases} y \equiv 4+6t_2 \\ x \equiv 1+2t_2 \end{cases} \Rightarrow \quad \binom{4}{1}, \binom{4}{3}, \binom{4}{5}, \binom{4}{7}, \binom{4}{9}, \binom{4}{11};$$

$$\binom{10}{1}, \binom{10}{3}, \binom{10}{5}, \binom{10}{7}, \binom{10}{9}, \binom{10}{11};$$

care constituie toate soluțiile congruenței date.

UNIVERSITATEA DIN CRAIOVA

BIBLIOGRAFIE

[1] C. P. Popovici, „Teoria numerelor", Editura didactică și pedagogică, București, 1973.
[2] F. Gh. Smarandache, „Rezolvarea ecuațiilor și a sistemelor de ecuații liniare în numere întregi", Lucrare de licență, Universitatea din Craiova, 1979.

BASES OF SOLUTIONS FOR THE LINEAL CONGRUENCES

RESUME

In this paper it is establish some properties about the solutions of a lineal congruence, bases of solutions for a lineal congruence and the establishment the other solutions starting from this bases. The purpose of this paper is the generalization of some theorems about the congruences from the papers presented in the bibliography, the introduction of some new notions and in the end it is establish a method for the settlement of the lineal congrunces.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara

MATEMATICĂ—FIZICĂ

Tom. 26 (40) **Fascicola 2**

CONGRUENŢE COMPACTE DECOMPOZABILE PE PRODUSE DIRECTE

DE

CARMENCITA UROŞU

În semn de omagiu profesorului Oct. Em. Gheorghiu la a 60-a aniversare.

Primită la redacţie 4.IV.1980.

1. Laticea congruenţelor unei algebre universale $U=<A, F>$, notată cu $\mathcal{C}(U)$, este o latice algebrică : este completă şi orice element este reuniune de elemente compacte. Pentru $H \subseteq A \times A$, vom nota cu $\theta(H)$ cea mai mică relaţie de congruenţă pe U astfel ca pentru orice $(a, b) \in H$ să rezulte $a \equiv b\ \theta(H)$. Evident are loc relaţia :

$$\theta(H)=\bigcap \{\theta \in \mathcal{C}(U)/a \equiv b\ (\theta) \quad \text{pentru orice } (a, b) \in H\}.$$

Dacă $H=\{(a, b)\}$, notăm $\theta(H)=\theta(a, b)$ şi o numim relaţia principală de congruenţă indusă de elementul $(a, b) \in A \times A$. Are loc relaţia :

$$\theta(H)=\bigvee(\theta(a, b)/(a, b) \in H).$$

Lemă. [1] Pentru o algebră U, relaţia de congruenţă θ este compactă în $\mathcal{C}(U)$ d şi $n \cdot d$ aceasta se poate reprezenta ca o reuniune finită de congruenţe principale :

$$\theta=\bigvee(\theta(a_i, b_i)/0 \leqslant i<n).$$

Demonstraţie. Considerăm $\theta(a, b) \leqslant \bigvee(\theta_i/i \in I)$, de unde rezultă că are loc relaţia $a \equiv b \ (\bigvee(\theta_i/i \in I))$. Deci există un şir finit : $a=z_0, z_1, \ldots, z_n=b$, astfel ca $z_j \equiv z_{j+1}\ (\theta_{ij})$, $j=\overline{0, n-1}$, $i_j \in I$. Fie $I'=\{i_0, \ldots, i_{n-1}\}$ şi $a \equiv b\ (\bigvee(\theta_i/i \in I'))$. Rezultă că $\theta(a, b) \leqslant \bigvee(\theta_i/i \in I')$ şi deci $\theta(a, b)$ este un element compact în laticea $\mathcal{C}(U)$. Orice reuniune finită de elemente compacte este compactă şi deci $\bigvee(\theta(a_i, b_i) \mid 0 \leqslant i<n)$ este compactă.

Reciproc, dacă $\theta \in \mathcal{C}(U)$ este o congruenţă compactă, rezultă că $\theta=\bigvee(\theta(a, b)/a \equiv b\ (\theta))$ şi deci $\theta=\theta(a_0, b_0) \vee \ldots \vee \theta(a_{n-1}, b_{n-1})$.

2. Fie algebra $U=\prod_{i=1}^{n} U_i$, $U_i=<A_i, F>$, $i=\overline{1, n}$, fiind algebre dintr-o varietate $\mathcal{V}$ de algebre universale.

Congruenţa $\theta \in \mathcal{C}\left(\prod_{i=1}^{n} U_i\right)$ este decompozabilă în produs, dacă există congruenţele $\theta_i \in \mathcal{C}(U_i)$ astfel ca :

$$\theta=\bigtimes_{i=1}^{n} \theta_i=\{((a_i)_{i=\overline{1,n}}, (b_i)_{i=\overline{1,n}})/a_i \equiv b_i\ (\theta_i),\ i=\overline{1, n}\}.$$

Propoziția 1.

Pentru familia de algebre $U_i \in \mathcal{U}$, $i=\overline{1, n}$, următoarele condiții sînt echivalente :

(1) Fiecare $\theta \in \mathcal{C}\left(\prod_{i=1}^{n} U_i\right)$ este decompozabilă.

(2) Pentru orice $a_i, b_i \in A_i$, $i=\overline{1, n}$, congruențele principale $\theta(a_i, b_i)$, $i=\overline{1, n}$, satisfac condiția :

$$\bigvee_{i=1}^{n} (\theta(a_i, b_i) = \theta((a_i)_{i=\overline{1,n}}, (b_i)_{i=\overline{1,n}}).$$

(3) Pentru orice $a_i, b_i, c_i \in b_i$, $i=\overline{1, n}$ are loc relația :

$$((c_1, \ldots, c_{i-1}, c_i, c_{i+1}, \ldots, c_n), (c_1, \ldots, c_{i-1}, b_i, c_{i+1} \ldots, c_n)) \in$$
$$\in \theta((a_i)_{i=\overline{1,n}}, (b_i)_{i=\overline{1,n}}).$$

Demonstrație. (I) $\Rightarrow$ (2). Considerăm congruența $\theta \in \mathcal{C}\left(\prod_{i=1}^{n} U_i\right)$ și elementele $a_i, b_i \in A_i$, $i=\overline{1, n}$. Deoarece $a_i \equiv b_i (\theta(a_i\ b_i))$, rezultă că elementul $((a_i)_{i=\overline{1,n}}, (b_i)_{i=\overline{1,n}})$ aparține congruenței $\bigvee_{i=1}^{n} \theta(a_i, b_i)$ și deci

$$\theta((a_i)_{i=\overline{1,n}}, (b_i)_{i=\overline{1,n}}) \subseteq \bigvee_{i=1}^{n} \theta(a_i, b_i).$$

Conform condiției (I), orice congruență pe algebra $\prod_{i=1}^{n} U_i$ este decompozabilă și considerăm congruențele $\theta_i \in \mathcal{C}(U_i)$, astfel ca :

$$\theta((a_i)_{i=\overline{1,n}}, (b_i)_{i=\overline{1,n}}) = \bigvee_{i=1}^{n} \theta_i.$$

Deoarece $a_i \equiv b_i (\theta_i)$, $i=\overline{1, n}$ rezultă relația :

$$\bigvee_{i=1}^{n} \theta(a_i, b_i) \leqslant \bigvee_{i=1}^{n} \theta_i = \theta((a_i)_{i=\overline{1,n}}, (b_i)_{i=\overline{1,n}})$$

și deci are loc condiția (2).

(2) $\Rightarrow$ (3) Conform condiției (2) putem scrie :

$$((c_1, \ldots, c_{i-1}, a_i, c_{i+1}, \ldots, c_n), (c_1, \ldots, c_{i-1}, b_i, c_{i+1}, \ldots, c_n)) \in$$

$$\in \bigvee_{i=1}^{n} \theta(a_i, b_i) = \theta((a_i)_{i=\overline{1,n}}, (b_i)_{i=\overline{1,n}}), \quad i=\overline{1, n},$$

de unde rezultă condiția (3).

(3) $\Rightarrow$ (*I*) Presupunem $((a_i)_{i=\overline{1,n}}, (b_i)_{i=\overline{1,n}}) \in \theta$ și deci are loc incluziunea :

$$\theta((a_i)_{i=\overline{1,n}}, (b_i)_{i=\overline{1,n}}) \leqslant \theta.$$

Conform condiției (3) are loc relația :

$$((c_1, \ldots, c_{i-1}, a_i, c_{i+1}, \ldots, c_n), (c_1, \ldots, c_{i-1}, b_i, c_{i+1}, \ldots, c_n)) \in$$
$$\in \theta((a_i)_{i=\overline{1,n}}, (b_i)_{i=\overline{1,n}}) \leqslant \theta.$$

Această condiție este echivalentă cu (I) conform Propoziției 4 din [3].

Ca o consecină a propoziției precedente rezultă :

Propoziția 2.

Într-o varietate $\mathcal{V}$ de algebre universale, orice congruență pe un produs direct finit este decompozabilă d și $n.d.$ pentru orice algebră $U_i \in \mathcal{V}$, $i=\overline{I, n}$, și orice $a_i, b_i, c_i \in A_i$, $i=\overline{I, n}$, avem satisfăcută condiția :

$$(I)\ ((c_1, \ldots, c_{i-1}, a_i, c_{i+1}, \ldots, c_n), (c_1, \ldots, c_{i-1}, b_i, c_{i+1}, \ldots, c_n) \in$$
$$\in \theta((a_i)_{i=\overline{1,n}}, (b_i)_{i=\overline{1,n}})$$

Propoziția 3,

Orice congruență compactă decompozabilă în laticea $\mathcal{C}\left(\prod_{i=1}^{n} U_i\right)$ se descompune în produs de congruențe compacte respectiv din $\mathcal{C}(U_i)$, $i=\overline{1, n}$.

Demonstrație. Conform Lemei, orice congruență $\theta \in \mathcal{C}\left(\prod_{i=1}^{n} U_i\right)$ care este compactă și decompozabilă satisface relația :

$$\theta = \bigvee_{j=1}^{m} [\theta_j ((a_i^j)_{i=\overline{1,n}}, (b_i^j)_{i=\overline{1,n}})] = \bigvee_{j=1}^{m} \left(\bigtimes_{i=1}^{n} \theta^j(a_i^j, b_i^j)\right) = \bigtimes_{i=1}^{n} \left[\bigvee_{j=1}^{m} \theta^j(a_i^j, b_i^j)\right],$$

unde $\bigvee_{j=1}^{m} \theta^j (a_i^j, b_i^j)$, $i=\overline{I, n}$, sînt elemente compacte respectiv în laticele $\mathcal{C}(U_i)$.

BIBLIOGRAFIE

[1] Grätzer G., Universal Algebra, Van Nostrand Princeton, 1968.
[2] Fraser G., and Horn A., Congruences relations in direct products, Proc. Amer. Math. Soc., 26 (1970), 390–394.
[3] Urosu C., Congruences decomposables sur produits directs des algèbres universelles (va apare).

CONGRUENCES COMPACTES DECOMPOSABLES SUR PRODUITS DIRECTS

RÉSUMÉ

Dans ce travail sont étudiées les congruences principales et compactes decomposables dans la latice $\mathcal{C}\left(\prod_{i=1}^{n} U_i\right)$. On donne une condition equivalente pour la decomposabilité d'un congruence $\theta \in \mathcal{C}\left(\prod_{i=1}^{n} U_i\right)$.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara
MATEMATICĂ—FIZICĂ
Tom. 26 (40) **Fascicola 2**

ASUPRA UNEI CONDIŢII DE TIP MALTEV PE ALGEBRE UNIVERSALE

DE
CARMENCITA UROŞU

În semn de omagiu profesorului Oct. Em. Gheorghiu la a 60-a aniversare

Primită la redacţie în 4.IV. 1980.

O varietate de algebre universale se numeşte permutabilă dacă orice algebră $U = <A, F>$ aparţinînd acesteia, are congruenţele permutabile.

Conform teoremei lui A.I. Malţev, o varietate $\mathcal{V}$ este permutabilă *d.* şi *n.d.* există un simbol polinomial ternar $p \in \mathcal{B}_{(3)}^{(\tau)}$ astfel încît ecuaţiile :

$$p(x, y, y) = x \text{ şi } p(x, x, y) = y$$

au loc în fiecare algebră $U \in \mathcal{V}$.

Cu ajutorul polinomului ternar p definim o relaţie binară δ pe produsul A^2 astfel :

$$((a, b), (a', b')) \in \delta$$

d. şi *n.d.* au loc următoarele condiţii :

$$a = p(a', b', b), \quad b = p(b', a', a), \quad a' = p(a, b, b') \text{ şi } b' = p(b, a, a').$$

Propoziţia 1.

Dacă polinomul p comută cu el însuşi, atunci δ este o relaţie de echivalenţă pe produsul $A \times A$.

Demonstraţie. Relaţia δ este reflexivă deoarece $((a, b), (a, b)) \in \delta$ *d.* şi *n.d.* au loc condiţiile : $p(a, b, b) = a$ şi $p(b, a, a) = b$. Acestea sînt tocmai condiţiile satisfăcute de polinomul Malţev p. Relaţia δ este evident simetrică. Pentru a demonstra tranzitivitatea, considerăm elementele :

$$((a, b), (a', b')) \in \delta \text{ şi } ((a', b'), (a'', b'')) \in \delta.$$

Deoarece polinomul p comută cu el însuşi, au loc următoarele relaţii :

$$a = p(a', b', b) = p(p(a'', b'', b'), b', b) = p(p(a'', b'', b'), p(b', b', b''),$$

$$p(b', b', b)) = p(p(a'', b', b'), p(b'', b', b'), p(b', b', b)) =$$

$$= p(a'', b'', p(b', b', b)) = p(a'', b'', b).$$

Analog se arată că au loc şi celelalte condiţii din definiţia relaţiei δ, ceea ce demonstrează că δ este tranzitivă.

Propoziţia 2.

Dacă fiecare operaţie fundamentală $f_\gamma \in F$, pe algebra $U \in \mathcal{V}$, comută cu p, atunci δ este o relaţie de congruenţă pe algebra $U \times U$.

Demonstraţie. Deoarece p este un polinom şi fiecare operaţie fundamentală $f_\gamma \in F$ (deci şi fiecare polinom) comută cu p, rezultă că p comută cu el însuşi şi deci δ este o relaţie de echivalenţă pe $A \times A$.

Pentru a arăta compatibilitatea relației δ față de orice $f_\gamma \in F$, considerăm elementele : $((a_i, b_i), (a_i', b_i')) \in \delta$, $I \leqslant i \leqslant n_\gamma$. Are loc relația :

$$f_\gamma(a_1, \ldots, a_{n\gamma}) = f_\gamma(p(a_1', b_1, b_1, \ldots, p(a_{n\gamma}', b_{n\gamma}', b_{n\gamma}')) =$$
$$= p(f_\gamma(a_1', \ldots, a_{n\gamma}'), f_\gamma(b_1', \ldots, b_{n\gamma}'), f_\gamma(b_1, \ldots, b_{n\gamma})).$$

Analog se verifică și următoarele relații

$$f_\gamma(b_1, \ldots, b_{n\gamma}) = p(f_\gamma(b_1', \ldots, b_{n\gamma}'), f_\gamma(a_1', \ldots, a_{n\gamma}'), f_\gamma(a_1 \ldots, a_{n\gamma}))$$
$$f_\gamma(a_1', \ldots, a_{n\gamma}') = p(f_\gamma(a_1, \ldots, a_{n\gamma}), f_\gamma(b_1, \ldots, b_{n\gamma}), f_\gamma(b_1', \ldots, b_{n\gamma}'))$$
$$f_\gamma(b_1', \ldots, b_{n\gamma}') = p(f_\gamma(b_1, \ldots, b_{n\gamma}), f_\gamma(a_1, \ldots, a_{n\gamma}), f_\gamma(a_1', \ldots, a_{n\gamma}')).$$

Rezultă :

$$f_\gamma((a_1, b_1), \ldots, (a_{n\gamma}, b_{n\gamma})) \equiv f_\gamma((a_1', b_1'), \ldots, (a_{n\gamma}', b_{n\gamma}')) \ (\delta)$$

și deci δ este o relație de congruență pe algebra $U \times U$.

În condițiile Propoziției 2, au loc următoarele proprietăți ale congruenței :

Propoziția 3.

I. Elementele diagonalei Δ_A a produsului cartezian $A \times A$ formează o clasă de congruență modulo δ și pentru orice $x, y, z \in A$, $p(x, y, z) = z$ *d.* și *n.d.* $x = y$.

2. Congruența δ împreună cu congruențele de proiecție $\pi_i = ker\ p_i$, $i = 1, 2$ formează o $\mathcal{M}_3$ sublatice în $\mathcal{C}(U \times U)$ astfel încît τ_u^2 și $\omega_u^2 \in \mathcal{M}_3$.

Demonstrație. I. Considerăm elementele $a, x, y \in A$, astfel încît : $(a, a) \equiv (x, y)$ (δ). Din definiția relației δ rezultă că au loc condițiile :

$$x = p(a, a, y) \text{ și } y = p(a, a, x).$$

Deoarece polinomul p satisface condițiile : $p(a, a, y) = y$ și $p(a, a, x) = x$, rezultă că $x = y$ și deci $(x, y) \in \Delta_A$.

Dacă pentru orice $x, y, z \in A$ avem $p(x, y, z) = z$, atunci au loc relațiile :

$$(z, z) = p((x, z), (y, z), (z, z)) = p((x, z), (y, z), (y, y)) = (p(x, y, y), p(z, z, y)) = (x, y)$$

Deoarece Δ_A este o clasă de congruență și $(x, y) \in \Delta_A$, rezultă că $x = y$.

2. Vom arăta că este congruența complementară pentru π_1 și π_2 în laticea $\mathcal{C}(U \times U)$.

Pentru orice elemente $(a, b), (a', b') \in A^2$ au loc relațiile :

$$(a, b) = p((a, a), (b, a), (b, b)) \ \pi_2 p((a', a), (b', a), (b, b)) \text{ și}$$
$$p((a', a), (b', a), (b,)) \ \delta \ p'(a', a), (b', a), (b', b')) = (a', b').$$

Deci $\pi_2 \circ \delta = \tau$ și analog se obține $\pi_1 \circ \delta = \tau$. Rezultă că $\pi_1 \vee \delta = \tau$ și $\pi_2 \vee \delta = \tau$.

Pentru a demonstra că $\pi_1 \wedge \delta = \omega$, să considerăm $((a, b), (a', b')) \in \pi, \wedge \delta$. Rezultă $a = a'$ și deci $((a, b), (a, b')) \in \delta$. Avem : $(a, p(b, b', a)) = p((a, b), (a, b'), (a, a)) = (a, a)$ (δ). Conform definiției congruenței δ avem $p(b, b', a) = a$ și deci $b = b'$, conform Prop. I. Astfel $\pi_1 \wedge \delta = \omega$ și analog $\pi_2 \wedge \delta = \omega$, deci mulțimea $\{\delta, \pi_1, \pi_2, \omega, \tau)$ formează o $\mathcal{M}_3$-sublatice în laticea $\mathcal{C}(U \times U)$.

BIBLIOGRAFIE

[1] Malțev, A. I., Algebraiceschie sistemi, Nauka, Moscova, 1970.
[2] Pixtey, A. F., Distributivity and permutability of congruence relations in equational classes of algebras Proc. Amer. Math. Soc., 14, 1963, 105–109.

SUR UNE CONDITION DE TYP MALȚEV DES ALGÈBRES UNIVERSELLES

RÉSUMÉ

Dans ce travail se definie une relation de congruence sur l'algèbre produit direct $U \times U$, á l'aide de polynôme ternaire Malțev p, dans une variéte permutable des algèbres universelles.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara

MATEMATICĂ—FIZICĂ

Tom. 26 (40) **Fascicola 2**

INDEFINITE INTEGRALS ON FUZZY SETS

BY

H. LUDESCHER AND E. ROVENTA

Dedicated to prof. Oct. Eu. Gheorghiu on the occasion of his sixtieth birthday.

Primită la redacţie în 11.V.1980.

Introduction.

Our purpose in this paper is to introduce the notion of proper fuzzy indefinite integral resp. fuzzy indefinite integral on B_K, the σ-algebra of the fuzzy measurable subsets of a given space X, and to give some theorems about this.

The probability of a fuzzy event A defined by a Lebesque-Stieltjes integral introduced in [1] is recovered as a particular case.

It is shown also the usefullness of these measures (defined on B_K) in order to distinguish fuzzy sets which have the same fuzzy degree. (def. 2.4).

For fundamental notions concerning measure and integration theory see [4] and for terminology conected with fuzzy measures and sets see [2].

If X is an arbitrary set and $F \subseteq X$ is a fixed fuzzy set then we shall call tronson (or essential part) of the fuzzy set F, the set (in the usual sense) $T(F) = \{x \mid 0 < \chi_F(x) < 1\}$ where $\chi_F(x) \in [0, 1]^X$ is the membership function of F. In [2] there are also introduced the usual sets :

$$S(F) = \{x \mid \chi_F(x) > 0\} \qquad Z(F) = \{x \mid \chi_F(x) = 0\} \quad \text{and}$$

$$H(F) = \{x \mid \chi_F(x) = 1\}.$$

One can be proved that the application $F \to T(F)$ has the following properties :

(a) $F_1 \leqslant F_2 \Rightarrow \begin{cases} H(F_1) = H(F_2) \Rightarrow T(F_1) \leqslant T(F_2) \\ Z(F_1) = Z(F_2) \Rightarrow T(F_1) \geqslant T(F_2) \end{cases}$

(b) $T\left(\bigcup_{i \in I} F_i\right) \leqslant \bigcup_{i \in I} T(F_i)$

(c) $T\left(\bigcup_{i \in I} F_i\right) = \bigcup_{i \in I} T(F_i)$ *if* $H\left(\bigcup_{i \in I} F_i\right) \leqslant \bigcap_{i \in I} H(F_i)$.

(d) $T\left(\bigcap_{i \in I} F_i\right) \leqslant \bigcap_{i \in I} T(F_i)$ *if* $H(F_i) = H(F_j) \quad i \neq J, \quad i, j \in I$.

(e) $T\left(\bigcap_{i \in I} F_i\right) = \bigcap_{i \in I} T(F_i)$ *if* $H(F_i) = H(F_j)$ $i \neq j$ and $Z\left(\bigcap_{i \in I} F_i\right) \geqslant \bigcap_{i \in I} Z(F_i)$.

(f) $T\left(\bigcap_{i \in I} F_i\right) = \bigcup_{i \in I} T(F_i)$ *if* $Z\left(\bigcap_{i \in I} F_i\right) \geqslant \bigcap_{i \in I} Z(F_i)$.

$$(g)\quad T\left(\bigcap_{i=1}^{p} F_i\right)=\begin{cases}\bigcap\limits_{i=1}^{p} T(F_i) & \text{if } H(F_i)=H(F_j)\ \ i\neq j,\quad i,j=\overline{1,p}.\\ \bigcup\limits_{i=1}^{p} T(F_i) & \text{if } Z(F_i)=Z(F_j)\ \ i\neq j,\quad i,j=\overline{1,p}.\end{cases}$$

2. Let (X, K, μ) a space with measure, where K is a σ-algebra and $\mu : K \to \mathbf{R}_+$ is finite. We take further the σ-algebra B_K of the fuzzy measurable sets from X [2] and a K-measurable function $f : X \to \overline{\mathbf{R}}$.

Definition 2.1. We call *proper fuzzy indefinite integral* of f, corresponding to the usual measure μ, the function $I_f : B_K \to \overline{\mathbf{R}}$ defined by :

$$I_f(F)=\int \chi_F f\chi_{T(F)}\ \mathrm{d}\mu$$

Definition 2.2. We call *fuzzy indefinite integral* of f, corresponding to the usual measure μ the function $\bar{I}_f : B_K \to \overline{\mathbf{R}}$ defined by :

$$\bar{I}_f(F)=\int f\chi_F\ \mathrm{d}\mu$$

Remark 2.1. If F is a usual set, then $T(F)=\emptyset$ hence $I_f(F)=0$ and $\bar{I}_f(F)$ is the usual indefinite integral.

If $f\equiv 1$, we shall denote :

$$I_1(F)=\int \chi_F \chi_{T(F)}\,\mathrm{d}\mu=\int_{T(F)}\chi_F\ \mathrm{d}\mu$$

$$\bar{I}_1(F)=\int \chi_F\ \mathrm{d}\mu=\int_{S(F)}\chi_F\,\mathrm{d}\mu$$

Definition 2.3. If $F_1, F_2 \in B_K$ we shall designate $F_1 \sim F_2 \Leftrightarrow m_T(F_1)=m_T(F_2)$ where m_T is the proper fuzzy measure generated by μ [2].

Oviously „$\sim$" is a equivalence relation. We shall denote the corresponding quetient set with C_T .

Definition 2.4. We call *fuzzy degree* any equivalence class from C_T .

Remark 2.2. The fuzzy measure $m_T : B_K \to \mathbf{R}$ introduced in [2] caracterises the fuzzy degree of a fuzzy set being identical for all the fuzzy sets whose tronsom have the same measure.

Using the function I_1 we can distinguish the fuzzy sets which have the same fuzzy degree.

Remark 2.3. If $\mu(X)=1$ and if the integral is in the sense Lebesque-Stieltjes then I_1 coincides which the probability of a fuzzy event introduced in [1].

Proposition 2.1. The following inequalities hold :

$$I_1(F)\leqslant m_T(F)$$

$$\bar{I}_1(F)\leqslant m_S(F)$$

where m_s is the fuzzy measure introduced in [2]. The assertion follows from $X_F(x)\leqslant 1$ $(x\in X)$.

Proposition 2.2. The following relation holds :

$$\bar{I}_1(G)=I_1(F)+\mu[H(F)].$$

It results from $S(F)=T(F)\cup H(F)$.

Remark 2.4. Denoting $V(F)=\frac{I_1(F)}{\bar{I}_1(F)}$ and $W(F)=\frac{\mu[H(F)]}{\bar{I}_1(F)}$ we have $V(F)+W(F)=1$ whatever would be $F\in B_K$ with $I_1(F)\neq 0$. If V is small then for a certain fuzzy degree F is „almost usual set" and when W is small for a certain fuzzy degree then F is an „almost proper fuzzy set".

Definition 2.5. We say that the K-measurable function $f: X\to\overline{\mathbf{R}}$ ($f=f^+-f^-$) has an integral related the positive measure μ if least one of the functions f^+, f^- is integrable that is either $\int f^+ d\mu<\infty$ or $\int f^- d\mu<\infty$.

Theorem 2.1. If f has an integral related the measure μ, then the proper fuzzy indefinite integral of f (resp. the fuzzy indefinite integral of f) is a real measure on B_K.

Proof. Because $f=f^+-f^-$ is sufficient to suppose $f\geqslant 0$. Let $F=\bigcup_1^\infty F_k, F_{k'}\cap F_k=\varnothing\ k'\neq k,\ F_k\in B_K$. It is clear that $\chi_F=\sum_1^\infty \chi_{F_k}$ and $\chi_{T(F)}^{(x)}=\sum_1^\infty \chi_{T(F_k)}^{(x)}$ (because $T(F_k)\cap T(F_k')=\varnothing$) one can observe that wichever would be $x\in X$ there is a single K_0 so that $\chi_{F_{k_0}}(x)\neq 0$ (resp. $\chi_{T(F_{r_0})}(x)\neq 0$). Hence $\chi_F(x)\cdot\chi_{T(F)}(x)=\sum_1^\infty \chi_{F_k}^{(x)}\cdot\chi_{T(F_r)}(x)$ holds for $x\in\chi$. Multiplying the above relation with $f\geqslant 0$ and integrating we get $I_f\left(\bigcup_1^\infty F_k\right)=\sum_1^\infty I_f(F_k)$. For the fuzzy indefinite integral the proof is analogous and uses the support instead of the tronsom.

Remark 2.5. If $f\geqslant 0$ then both I_f and $\bar{I}_f$ are nonnegative measures. Of course this remark is valid for I_1, resp. $\bar{I}_1$. But I_1 (unlike $\bar{I}_1$) is neither monotonous, nor substractive (this is a consequence of the fact that for an arbitrary fuzzy set A does not hold $A\cap CA=\varnothing$).

The next theorem is a generalisation of the countable additivity of the proper fuzzy indefinite integral (resp. of the fuzzy indefinite integral).

Theorem 2.2. If f has an integral related to the measure μ, then for each sequence $\{F_k\}_{k\in N}$ there hold the foolowing equalities:

(i) $I_f\left(\bigcup_1^\infty F_k\right)=\sum_1^\infty I_f(F_k)$ whenever $H\left(\bigcup_1^\infty F_k\right)\leqslant\bigcap_1^\infty H(F_k)$ and $m_T(F_k\cap F_k')=0$

(ii) $I_f\left(\bigcup_1^\infty F_k\right)=\sum_1^\infty I_f(F_k)$ if $m_s(F_k\cap F_k')=0,\quad k\neq k'$.

Proof. (i) If we designate $F=\bigcup_1^\infty F_k$, then $H\left(\bigcup_1^\infty F_k\right)\leqslant\bigcup_1^\infty H(F_k)$ implies: $T\left(\bigcup_1^\infty F_k\right)=\bigcup_1^\infty T(F_k)$. Hence we can write: $T(F)=A_1\cup A_2\cup\ldots\cup\ldots\bigcup_{k-1} A_k\cup\ldots A_k\cap A_k'=\varnothing$ (for $k\neq k'$) where $A_1=T(F_1)$, $A_k=T(F_k)-\bigcup_{n=1}[T(F_k)\cap T(F_n)]$. We take by definition $E_k=F_k\cap A_k\in B_K$ and one can observe that $T(E_k)=A_k$. Therefore: $T(F)=\bigcup_{k=1}^\infty T(E_k)$ with $T(E_k)\cap$

$\bigcap T(E'_k)=\varnothing$ $(k\neq k')$. By hypothesis we have $H(F_i)=H(F_j)$ $(i\neq j)$ hence $0=m_T(F_k\bigcap F_k)=\mu[T(F_k\bigcap F_k)]=\mu[T(F_k)\bigcap T(F_k)]$ and $T(E_k)=T(F_k)-$ $-\bigcup_{n=1}[T(F_k)\bigcap T(F_n)]$ therefore $m_T(E_k)=m_T(F_k)$ wherefrom $\int_{T(E_k)} f\chi_{E_k}d\mu=$ $=\int_{T(F_k)} f\chi_{F_k}\,d\mu$ and :

$$I_f\left(\bigcup_1^\infty F_k\right)=\sum_1^\infty\int_{T(E_k)} f\chi_{E_k}\,d\mu=\sum_1^\infty\int_{T(F_k)} f\chi_{F_k}\,d\mu=\sum_1^\infty I_f(F_k)$$

For I_f one can judge in an analogous manner using $S(F)$.

Theorem 2.3. If the function f has an integral related to μ then for every-increasing sequence $\{F_k\}_{k\in N}$ of fuzzy sets from B_K with $F_k\nearrow F$, the following inequalities holds :

(i) $I_f(F)=\lim_{n\to\infty} I_f(F_k)$ if $H(F_k)=H(F)$, $k\in N$

(ii) $I_f(F)=\lim_{n\to\infty} I_f(F_k)$

Proof. (i) If $F_k\nearrow F$ and if $H(F_k)=H(F)_{,k\in N}$, we have $T(F_k)\nearrow T(F)$ hence $T(F)=\bigcup_1^\infty T(F_k)=T(F_1)\cup[T(F_2)-T(F_1)]\cup\ldots\cup[T(F_n)$ $T(F_{m-1})]\cup\ldots$ If we put by definition $F_0=\varnothing$, we get :

$$I_f(F)-\int_{T(F)} f\chi_F\,d\mu=\sum_{n=1}^\infty\int_{T(F_n)-T(F_{n-1})} f\chi_F\,d\mu=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^k\int_{T(F_n)-T(F_{n-1})} f\chi_F\,d\mu-$$

$$=\lim_{k\to\infty}\int_{T(F_k)} f\chi_F\,d\mu=\lim_{k\to\infty} I_f(F_k)$$

(ii) can be proved in an anlogous manner replacing in the above proof. the tronson by the support.

3. *Theorem 3.1.* $\bar I_1$ is a complete on B_K iff μ is a complete measure on K.

Proof. We suppose that $\bar I_1(F)=0$. Because $\chi_F(x)>0$ if $x\in S(F)$ we get $\mu[S(F)]=0$. Let us consider $E\leqslant F$; then $S(E)\leqslant S(F)$. But μ is assumed complete, hence $S(E)\in K$ and $\mu[S(E)]=0$.

If we consider $E\alpha=\{x\mid\chi_E(x)\leqslant\alpha\}$ (for $\alpha\in(0,1]$) then $E\alpha\in S(E)$ and we get (from the completness of μ) that $E\alpha\in K$ $(\alpha\in(0,1])$. Further the set $E_0=\{x\mid\chi_E(x)=0\}=X\quad S(E)$, hence $E_0\in K$. Therefore $E\alpha\in K$ whichver would $\alpha\in[0,1]$ be. But this means by definition $E\in B_K$.

The converse implication follows since $\bar I_j$ is an extension of μ.

Remark 3.1. The completness of the measure I_1 would imply $B_K=[0,1]$ (this because we have $I_1(x)=0$).

Definition 3.1. Let m, n be two real, finite measures given on B_K. We shall say that m is *absolutely continuous* related to the measure n, if for every $\varepsilon>0$ there is an $\delta>0$ so that :

$$E\leqslant X,\ \bar n(E)<\delta\ \text{imply}\ |m(E)|<\varepsilon.$$

Remark 3.2. $\tilde{n}$ is the total variation of n, wich in the case $n \geqslant 0$ coincides with n (on B_K).

Remark 3.3. If μ is positive and finite on K, then I_1 and $\bar{I}_1$ are positive and finite measures on B_K.

Theorem 3.2. If $f: X \to \bar{\mathbf{R}}$ is integrable, then I_f (resp. $\bar{I}_f$) are absolutely continuous related to I_1 (resp. $\bar{I}_1$).

Proof. We will take $f \geqslant 0$. According with Borel's theorem [4], ch. IV there s a sequence $\{f_n\}_{n \in N}$ of simple function, with $f_n \leqslant n$. Then :

$$\int f \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int f_n \, d\mu < \infty$$

For $\varepsilon > 0$, there is $n_0 \in N$ so that for $n \geqslant n_0$ it takes place :

$$\int f \, d\mu - \int f_n \, d\mu < \varepsilon/2$$

Let us consider the difference :

$$I_f(E) - I_{f_n}(E) = I_{f-f_n}(E) = \int (f - f_n) \cdot \chi_E \chi_{T(E)} \, d\mu \leqslant \int (f - f_n) \, d\mu \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon/2 \text{ (for } n \geqslant n_0)$$

Hence :

$$I_f(E) < If_{n_0}(E) + \varepsilon/2$$

But :

$$If_{n_0}(E) = \int f_{n_0} \chi_E \chi_{T(E)} \, d\mu \leqslant n_0 \int_{T(E)} \chi_E \, d\mu = n_0 I_1(E)$$

Let $E \in B_K$ so that $I_1(E) < \frac{\varepsilon}{2n_0}$; then we get $I_f(E) < \varepsilon$.

If f is arbitrary (i.e. does not keep the same sign) integrable function we consider f^+, f^- and because $|f| = f^+ + f^-$ we deduce that $|f|$ is also integrable. Further we apply the well known inequality $\left| \int f \, d\mu \right| \leqslant \int |f| \, d\mu$

For $\bar{I}_f$ we judge analogously.

Remark 3.4. I_f (resp. $\bar{I}_f$) is absolutely continuous related to m_T (resp. m_s), because $I_1(E) \leqslant m_T(E)$ (resp. $\bar{I}_1(E) \leqslant m_s(E)$).

REFERENCES

[1] Zadeh L. A., Probability measure of fuzzy events, J. Math. Anal. Appl. 23 (1968), 421–427.

[2] Roventa E., Fuzzy measures Bul. Sti. Tehn. Inst. Politeh. Timişoara, 1 (1977).

[3] Bîtea I., Lecţii de teoria integrării, Timişoara, 1972, litografiat.

[4] Halmos P. R., Measure Theory, Van Nostrand, New-York, 1964.

[1] Z a d e h L. A., Probability measures of fuzzy events, J. Math. Anal. Appl. 23 (1968), 421–427.
[2] R o y s e n a r a n E., Fuzzy measures, Bull. Sci. Tech. Bhat. Polish. Timisoara, 17 (1972).
[3] B l i n e a u L., Locch de fonds integrall, Timisoara, 1972, Hogenfat.
[4] H a l m o s P. R., Measure Theory, Van Nostrand, New-York, 1961.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara

MATEMATICĂ—FIZICĂ

Tom. 26 (40) Fascicola 2

ASUPRA CONVERGENŢEI ŞIRURILOR DE FUNCŢII MULTIVOCE

DE

OCTAVIAN LIPOVAN

În semn de omagiu profesorului Oct. Em. Gheorghiu la a 60-a aniversare.

Primită la redacţie în 11.V.1980.

0. Introducere

Printre tipurile de convergenţă, asociate frecvent unei măsuri, patru dintre ele reţin în principal atenţia: convergenţa în măsură, convergenţa aproape peste tot, convergenţa aproape uniformă (asimptotică) şi convergenţa în medie.

Deoarece definirea convergenţei în medie este strîns legată de tipul de integrală care se consideră, în [5] a fost introdusă construcţia unei integrale multivoce prin intermediul familiilor de submăsuri şi legată de aceasta a fost definită şi studiată convergenţa în $\Omega-\Gamma_\mu$ -medie a şirurilor de aplicaţii multivoce.

În prezenta lucrare sînt introduse primele trei tipuri de convergenţă într-un cadru general, diferit de cel clasic, prin înlocuirea unei măsuri cu o familie de submăsuri şi a şirurilor de funcţii reale prin şiruri de aplicaţii multivoce.

1. Ipoteze generale

Fie X o mulţime nevidă iar $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ o subalgebră a mulţimii părţilor lui X. Dacă $\Gamma = \{\gamma_i : \mathcal{B} \to \bar{\mathbf{R}}^+\}_{i \in I}$ este o familie nevidă de submăsuri pe $\mathcal{B}$, atunci din [2] rezultă că există o topologie unică τ_Γ pe $\mathcal{P}(X)$, indusă de o structură uniformă, astfel că $\mathcal{P}(X)(\Gamma) = (\mathcal{P}(X), \Delta, \bigcap, \tau_\Gamma)$ este un inel topologic prin raport cu operaţiile de diferenţă simetrică şi intersecţie, iar $\mathcal{B}(\Gamma) = (\mathcal{B}, \Delta, \bigcap, \tau_\Gamma)$ este subinelul topologic $\mathcal{B}$, dotat cu topologia indusă.

Fie Y, o mulţime nevidă şi $\Omega = \{\omega_j : \mathcal{P}(Y) \to \bar{\mathbf{R}}_+\}_{j \in J}$ o familie nevidă de submăsuri pe $\mathcal{P}(Y)$. Se ştie [7] că familia Ω induce pe mulţimea $\mathcal{P}(Y)$, a părţilor lui Y o structură uniformă $\mathcal{P}(Y)(\Omega) = (\mathcal{P}(Y), \mathfrak{U}_\Omega)$ în care familia:

$$\{H_{K,\varepsilon}, K \subset J, K = \text{finită}, \varepsilon > 0\},$$

unde:

$$H_{K,\varepsilon} = \{(A, B) \mid (A, B) \in \mathcal{P}(Y) \times \mathcal{P}(Y);\ \omega_j(A \Delta B) < \varepsilon,\ j \in K\}$$

este bază pentru uniformitatea $\mathfrak{U}_\Omega$. În mod analog, [2], această structură uniformă induce pe $\mathcal{P}(Y)$ o topologie τ_Ω, astfel că $\mathcal{P}(Y)(\Omega) = (\mathcal{P}(Y), \Delta, \bigcap \tau_\Omega)$ este inel topologic.

Numim aplicație multivocă a lui X în Y, o aplicație a lui X în mulțimea $\mathcal{P}(Y)$ a părților lui Y și o notăm $f: X \to \mathcal{P}(Y)$.

2. Convergența în $\Omega-\Gamma$—submăsuri

Prin generalizarea modelului stabilit în [3, p. 101–104], fiecărui K finit, $K \subseteq I$, $\varepsilon > 0$ și $U \in \mathfrak{U}_\Omega$ le vom asocia mulțimea :

$$W_K(U, \varepsilon) = \{(f, g) \in [\mathcal{P}(Y)]^X \times [\mathcal{P}(Y)]^X ;\ \gamma_i^* \{x \in X ;\ (f(x), g(x)) \notin U\} < \varepsilon,\ i \in K\}$$

unde γ_i^* este submăsura $\gamma_i^* : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbf{R}}_+$, care pentru $A \subseteq X$, $\gamma_i^*(A) = \inf\{\gamma_i(E) ;\ A \subseteq E \in \mathcal{B}\}$. Familia $\{W_K(U, \varepsilon)\}$ formează atunci un sistem funadamental de anturaje pentru o structură uniformă $\mathfrak{U}_{\Omega-\Gamma}$ pe $[\mathcal{P}(Y)]^X$.

Notăm cu $[\mathcal{P}(Y)]^X(\Omega-\Gamma) = ([\mathcal{P}(Y)]^X, \mathfrak{U}_{\Omega-\Gamma})$.

Definiția 2.1.

Fie $\{f_\alpha\}$ un șir generalizat din $[\mathcal{P}(Y)]^X$ și fie $f \in [\mathcal{P}(Y)]^X$. Dacă $f_\alpha \to f$ în $[\mathcal{P}(Y)]^X_{(\Omega-\Gamma)}$, vom spune că $\{f_\alpha\}$ tinde către f în $\Omega-\Gamma$ — submăsuri și notăm $f_\alpha \xrightarrow{\Omega-\Gamma} f$.

Se observă că structura uniformă $\mathfrak{U}_{\Omega-\Gamma}$ este funcție de două variabile Ω și Γ. Teorema următoare precizează efectul pe care-l are variația uneia dintre aceste variabile dacă cealaltă rămîne fixă.

Teorema 2.1. Au loc implicațiile :

(a) $\Omega' \ll \Omega \Rightarrow \mathfrak{U}_{\Omega'-\Gamma} \subseteq \mathfrak{U}_{\Omega-\Gamma}$

(b) $\Gamma' \ll \Gamma \Rightarrow \mathfrak{U}_{\Omega-\Gamma'} \subseteq \mathfrak{U}_{\Omega-\Gamma}$

Demonstrație. (a) Fie $\Omega = \{\omega_j\}_{j \in J}$ și $\Omega' = \{\omega_l'\}_{l \in L}$ cu $\Omega' \ll \Omega$.

Faptul că Ω' este absolut continuă prin raport cu Ω înseamnă că pentru orice $l \in L$, $\lim\limits_{E \to \emptyset \text{ în } \tau_\Omega} \omega_l^*(E) = 0$, ceea ce implică $\mathfrak{U}_{\Omega'} \subseteq \mathfrak{U}_\Omega$, de unde rezultă afirmația (a).

(b) Fie $\Gamma = \{\gamma_i\}_{i \in I}$ și $\Gamma' = \{\gamma_m'\}_{m \in M}$. Va fi suficient să arătăm că pentru $U \in \mathfrak{U}_\Omega$, $\varepsilon > 0$, $m \in M$, anturajul $W_{\gamma_m'}(U, \varepsilon)$ conține un anturaj din $\mathfrak{U}_{\Omega-\Gamma}$. Dar prin ipoteză, există K, finit, $K \subseteq I$, și $\varepsilon > 0$, astfel ca $\gamma_m'(E) < \varepsilon'$ dacă $E \subseteq X$, $\gamma_i^*(E) < \varepsilon$ și $i \in K$. Se deduce atunci că $\bigcap\limits_{i \in k} W_{\gamma_i}(U, \varepsilon) \subseteq W_{\gamma_m'}(U, \varepsilon')$ de unde rezultă afirmația.

Vom da în continuare o condiție suficientă pentru ca $[\mathcal{P}(Y)]^X(\Omega-\Gamma)$ să fie semimetrizabil.

Teorema 2.2.

Dacă $\Omega \equiv \Omega'$ iar $\Gamma \equiv \Gamma'$, unde Ω' și Γ' sînt numărabile, atunci $[\mathcal{P}(Y)]^X(\Omega-\Gamma)$ este semimetrizabil.

Demonstrație. Două familii de submăsuri Γ și Γ' se zic echivalente, $\Gamma \equiv \Gamma'$ dacă $\Gamma' \ll \Gamma$ și $\Gamma \ll \Gamma'$. Se știe [2] că dacă Γ' este numărabilă, există o submăsură finită γ' pe B, astfel ca $\Gamma' \equiv \{\gamma'\}$, iar spațiul $B(\Gamma')$ este un spațiu semimetric. Analog, din ipoteză rezultă $\Omega' \equiv \{\omega'\}$ iar spațiul $\mathcal{P}(Y)(\Omega')$ este semimetrizabil, unde un sistem numărabil de anturaje este format din $\{U_m\}_{m=1}^\infty$, cu :

$$U_m = \left\{(A, B) \mid (A, B) \in [\mathcal{P}(Y)] \times [\mathcal{P}(Y)],\ \omega'(A \Delta B) < \frac{1}{m}\right\}$$

Atunci mulțimile :

$$\left\{(f, g) \in [\mathcal{P}(Y)]^X \times [\mathcal{P}(Y)]^X ;\ \gamma'^* \left\{x \in X,\ \omega'[f(x) \Delta g(x)] \geqslant \frac{1}{m}\right\} < \frac{1}{m}\right\}$$

$m, n = 1, 2, \ldots$, formează un sistem fundamental numărabil de anturaje pentru $[\mathcal{P}(Y)]^X (\Omega' - \Gamma) = [\mathcal{P}(Y)]^X (\Omega - \Gamma)$.

3. Convergența aproape peste tot și aproape uniformă

În ipotezele făcute anterior, se zice că o mulțime $A \subseteq X$ este Γ-neglijabilă dacă pentru orice $i \in I$, $\gamma_i^* (A) = 0$. Notăm $Z_\Gamma = \{A ;\ A \subseteq X$ și A este Γ-neglijabilă$\}$. Dacă $\Gamma = \{\gamma\}$ notăm $Z_\gamma = Z_\Gamma$. Se poate arăta că $Z_\Gamma = \overline{\{\varnothing\}}$, unde $\overline{\{\varnothing\}}$ este aderența lui $\{\varnothing\}$ în $\mathcal{P}(X)$ (Γ).

Definiția 3.1.

Fie $\{f_\gamma\}$ un șir generalizat din $[\mathcal{P}(Y)]^X$ și fie $f \in [\mathcal{P}(Y)]^X$. Dacă există $A \in Z_\Gamma$, astfel ca $f_\alpha(x) \to f(x)$, pentru orice $x \in X \setminus A$, vom spune că $\{f_\alpha\}$ *tinde* $\Omega - \Gamma$-*aproape peste tot la* f și vom nota $f_\alpha \to f$ a.p.t. $(\Omega - \Gamma)$.

Definiția 3.2.

Fie $\{f_\alpha\}$ un șir generalizat din $[\mathcal{P}(Y)]^X$ și fie $f \in [\mathcal{P}(Y)]^X$. Dacă există un șir generalizat $\{A_\beta\}$ din $\mathcal{P}(X)$ astfel ca $A_\beta \to \varnothing$ în $\mathcal{P}(X)$ (Γ) și dacă pentru orice β, $f_\alpha(x) \to f(x)$ uniform pe $X - A_\beta$, vom spune că $\{f_\alpha\}$ tinde la f, $\Omega - \Gamma$-*aproape uniform* (sau $\Omega - \Gamma$-asimptotic) și vom nota prin $f_\alpha \to f\ a \cdot u \cdot (\Omega - \Gamma)$.

Afirmațiile teoremei următoare se deduc din aceste definiții :

Teorema 3.1.

Pentru orice șir generalizat $\{f_\alpha\}$ din $[\mathcal{P}(Y)]^X$ și $f \in [\mathcal{P}(Y)]^X$ au loc implicațiile :

(a) $f_\alpha \to f a \cdot u \cdot (\Omega - \Gamma) \Rightarrow f_\alpha \xrightarrow{\Omega - \Gamma} f$.

(b) $f_\alpha \to f a \cdot u \cdot (\Omega - \Gamma) \Rightarrow f_\alpha \to f\ a \cdot p \cdot t \cdot (\Omega - \Gamma)$.

Dacă $\Gamma' \ll \Gamma$, atunci :

(c) $f_\alpha \to f a \cdot p \cdot t \cdot (\Omega - \Gamma) \Rightarrow f_\alpha \to f\ a \cdot p \cdot t \cdot (\Omega - \Gamma')$

(d) $f_\alpha \to a \cdot u \cdot (\Omega - \Gamma) \Rightarrow f_\alpha \to a \cdot u \cdot (\Omega - \Gamma')$.

Teorema 3.2. Fie $\Omega \equiv \Omega'$ și $\Gamma \equiv \Gamma'$ unde Ω' este numărabilă iar Γ' este o familie numărabilă de submăsuri σ-subaditive pe B. Dacă șirul $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ și f sînt din $[\mathcal{P}(Y)]^X$ astfel că $f_n \xrightarrow{\Omega - \Gamma} f$, atunci $\{f_n\}_{n=1}^\infty$, posedă un subșir care converge $\Omega - \Gamma$-aproape uniform la f.

Demonstrație. Din ipoteză și din teoremele 2.1. (b) și 3.1. (d) se poate presupune că $\Gamma \equiv \{\gamma\}$ unde γ este σ-subaditivă iar $\Omega \equiv \{\omega\}$.

Fie d semimetrica $d(A, B) = \omega(A \Delta B)$, $A, B \in \mathcal{P}(Y)$ care definește structura uniformă $\mathfrak{U}_\Omega$. În continuare demonstrația teoremei poate fi făcută la fel cu cea din [4 p. 93. th. D.] prin înlocuirea valorii absolute $|\ .\ |$ cu $d(\cdot, \varnothing)$. Deoarece nu am făcut nici o ipoteză de măsurabilitate, va fi necesar să folosim σ-subaditivitatea submăsurii γ^* pe $\mathcal{P}(X)$.

BIBLIOGRAFIE

[1] Berge Claude, Espaces topologiques. Functions multivoques. Dunod, Paris, 1959.
[2] Drewnowski L., Topological Rings of Sets, Continuous Set Functions, Integration I, II, Bull. Acad. Sci. Sér. Sci. math. astr. et phys. 20. nr. 4, 269—286. 1972.
[3] Dunford N. and Schwartz J., Linear Operators, Part. I, Interscience, New York, 1957.
[4] Halmos P. R., Measure Theory, Van Nostrand, New York, 1950.
[5] Lipovan O., Sur l'intégrabilité des fonctions multivoques. Matematica-Revue d'analyse numerique et de théorie de l'approximation (a paraitre).
[6] Lipovan O., Aplicații multivoce submăsurabile. S.I.E.F.A.C. Cluj-Napoca, 1980.
[7] Masse J. C., Intégration dans les semi-groupes. Collection mathématique Nr. 23. Département de mathématiques. Université Laval, Quebec, 1974.

SUR LA CONVERGENCE DES SUITES DE FONCTIONS MULTIVOQUES

RÉSUMÉ

Parmi les types des convergence fréquemment associés a une mesure, quatre d'entre eux retiennent principalement l'attention : la convergence en mesure, la convergence presque uniforme, la convergence presque partout et la convergence en moyenne.

Dans cette note on étudi les trois premieres de ces convergences en les plaçant dans le contexte général ou la mesure est remplacée par une famille de sous-mesures, et les fonctions sur lesquelles portre la convergence sont des fonctions multivoqués.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara

MATEMATICĂ—FIZICĂ

Tom. 26 (40) **Fascicola 2**

O PROPRIETATE A POLINOAMELOR LUI S.N. BERNSTEIN

DE

A. LUPAŞ şi C. MANOLE

În semn de omagiu profesorului Oct. Em. Ghcorghiu la a 60-a aniversare.

Primită la redacţie în 21.V.1980.

1. Fie $f: [0, 1] \to R$ şi $B_n f$ polinomul lui S.N. Bernstein definit prin

$$(B_n f)(x) = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k}(x) f\left(\frac{k}{n}\right), \quad x \in [0, 1]$$

$$b_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Comportarea şirului $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ pe mulţimea funcţiilor convexe de un anu nit ordin a constituit obiectul mai multor cercetări [1], [3], [4]. Astfel, D.D. Stancu demonstrează că dacă f este o funcţie neconcavă de ordinul întîi şi doi pe intervalul [0, 1], atunci pentru $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ are loc următoarea proprietate de monotonie:

$$(B_n f)'(x) - (B_{n+1} f)'(x) \geqslant 0. \tag{1}$$

În cele ce urmează, considerîndu-se în loc de derivata de ordinul întîi diferenţa divizată pe două puncte distincte din [0, 1] a polinomului $B_n f$, se prezintă o generalizare a inegalităţii (1).

2. **Mai întîi vom enunţa**

Teorema 1. *Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}$, $p \in N$, este un sistem de puncte distincte, atunci diferenţa divizată a polinomului $B_n f$ pe nodurile x_i, $i = \overline{1, p+1}$ are următoarea reprezentare:*

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}; B_n f] =$$

$$= \frac{p!}{n^p} \sum_{k=0}^{n-p} \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}, \ldots, \frac{k+p}{n}; f\right] \cdot [x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}; Q_{k,n,p}] \tag{2}$$

unde

$$Q_{k,n,p}(x) = \sum_{i=k+p}^{n} \binom{i-k-1}{p-1} b_{n,i}(x). \tag{3}$$

Demonstraţie. Deoarece

$$\sum_{k=0}^{m} X_k Y_k = \sum_{k=0}^{m} (X_k - X_{k+1}) \sum_{i=0}^{k} Y_i. \quad X_{m+1} = 0$$

se obține

$$[x_1, x_2; B_n f] = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}; f \right] \cdot [x_1, x_2; Q_{k,n,1}]$$

Dacă presupunem adevărată egalitatea

$$[x_1, x_2, \ldots, x_p; \quad B_n f] =$$

$$= \frac{(p-1)!}{n^{p-1}} \sum_{k=0}^{n-p+1} \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}, \ldots, \frac{k+p-1}{n}; f \right] \cdot [x_1, x_2, \ldots x_p; Q_{k,n,p-1}]$$

atunci

$$[x_1, x_2, \ldots, x_p; B_n f] =$$

$$= -\frac{p!}{n^p} \sum_{k=0}^{n-p} \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}, \ldots, \frac{k+p}{n}; f \right] \cdot \left[x_1, x_2, \ldots, x_p; \sum_{j=0}^{k} Q_{j,n,p-1} \right] +$$

$$+ \left[\frac{n-p+1}{n}, \frac{n-p+2}{n}, \ldots, 1; f \right] \cdot \left[x_1, x_2, \ldots, x_p; \sum_{j=0}^{n-p+1} Q_{j,n,p-1} \right]$$

Dar

$$\sum_{j=0}^{k} Q_{j,n,p-1} = \sum_{i=p-1}^{n} \binom{i}{p-1} b_{n,i} \cdot Q_{k,n,p}, \quad k = \overline{0, n-p}.$$

Cu aceasta

$$[x_1, x_2, \ldots, x_p; B_n f] =$$

$$= \frac{p!}{n^p} \sum_{k=0}^{n-p} \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}, \ldots, \frac{k+p}{n}; f \right] \cdot [x_1, x_2, \ldots, x_p; Q_{k,n,p}] + C_{n,p}(f)$$

unde

$$C_{n,p}(f) = \binom{n}{p-1} \cdot \left[\frac{n-p+1}{n}, \frac{n-p+2}{n}, \ldots, 1; f \right] - \frac{p!}{n^p} \sum_{k=0}^{n-p} \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}, \ldots, \frac{k+p}{n}; f \right].$$

Egalitatea

$$(x_{p+1} - x_1) \cdot [x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}; B_n f] =$$

$$= [x_2, x_3, \ldots, x_{p+1}; B_n f] - [x_1, x_2, \ldots, x_p; B_n f]$$

completează demonstrația.

Această teoremă permite regăsirea unui rezultat remarcabil stabilit pe o altă cale de T. Popoviciu [2] : deoarece

$$Q'_{k,n,p} = n Q_{k,n-1,p-1}$$

rezultă

$$Q^{(p)}_{k,n,p} = \frac{p!}{(n-p)!} b_{n-p,k}$$

adică

$$Q^{(p)}_{k,n,p}(x) \geqslant 0, \quad x \in [0, 1].$$

Fie $x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}$ puncte distincte din $[0, 1]$; din (4) obținem

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}; Q_{k,n,p}] \geqslant 0, \quad k = \overline{0, n-p}. \tag{5}$$

Dacă f este o funcție reală, neconcavă de ordinul $p-1$ pe mulțimea $\left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}$, adică

$$\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}, \ldots, \frac{k+p}{n}; f\right] \geqslant 0, \quad k=\overline{0, n-p}$$

atunci din (5) rezultă

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}; B_n f] \geqslant 0.$$

Prin urmare, operatorul lui S.N. Bernstein conservă alura funcției pe care o aproximează.

Teorema 2. *Dacă* $f: [0, 1] \to R$ *este neconcavă de ordinul întîi și doi pe* $[0, 1]$ *atunci oricare ar fi* u *și* v *puncte distincte din* $[0, 1]$ *astfel încît* $u+v \leqslant 1$, *inegalitățile*

$$[u, v; B_n f] \geqslant [u, v; B_{n+1} f], \quad n=1, 2, \ldots$$

sînt verificate.

Demonstrație. Putem scrie

$$[u, v; B_n f - B_{n+1} f] = \frac{1-u-v}{n(n+1)} \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n+1}, \frac{k+1}{n}; f\right] b_{n-1,k}(v) +$$

$$+ \frac{u(1-u)}{n(n+1)} \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n+1}, \frac{k+1}{n}; f\right] \cdot [u, v; b_{n-1,k}].$$

Pe de altă parte,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n+1}, \frac{k+1}{n}; f\right] \cdot [u, v; b_{n-1,k}] = \sum_{k=0}^{n-2} \left\{\frac{2}{n}\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}, \frac{k+2}{n+1}, \frac{k+2}{n}; f\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{n+1}\left[\frac{k+1}{n+1}, \frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}, \frac{k+2}{n+1}; f\right]\right\} \cdot [u, v; Q_{k,n-1,1}].$$

În conformitate cu (5), $[u, v; Q_{k\,n,-1,\,1}] \geqslant 0$ pentru $k=\overline{0, n-2}$ și deoarece prin ipoteză f este neconcavă de ordinul întîi și doi, teorema este demonstrată. Fie $u \in [0, 1]$, fixat. Atunci

$$\lim_{v \to u} [u, v; B_n f - B_{n+1} f] = (B_n f)'(u) - (B_{n+1} f)'(u),$$

și deoarece

$$Q'_{k,\,n-1,\,1}(u) = (n-1)\, b_{n-2,\,k}(u)$$

regăsim rezultatul stabilit în [3].

BIBLIOGRAFIE

[1] A r a m ă O., Proprietăți privind monotonia șirului polinoamelor de interpolare ale lui S.N. Bernstein și aplicarea lor la studiul aproximării funcțiilor. Studii și cercetări de matematică (Cluj) 8, 195–210 (1957).

[2] P o p o v i c i u T., Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur. Mathematica (Cluj), 10, 49–54, (1934).

[3] S t a n c u D. D., On the monotonicity of the sequence formed by the first order derivatives of the Bernstein polynomials. Math. Z. 98, 46–51 (1967).
[4] T e m p l e W. B., Stieltjes integral representation of convex functions. Duke Math. J. 21, 527–531 (1954).

A PROPERTY OF THE S.N. BERNSTEIN POLYNOMIALS

ABSTRACT

If $f: [0, 1] \to R$ let us denote by $B_n f$ the corresponding Bernstein polynomial of degree n. In the paper [3] D.D. Stancu has investigated the monotonicity of the sequence $(B_n f)'$, $n=1, 2, \ldots$.

Our aim is to give a generalization of the main result from [3]. More precisely, we prove the following : (see Theorem 2) if $f: [0, 1] \to \mathbf{R}$ is non-concave of first and second order on [0, 1], then for every distinct points u, v from [0, 1], $u+v \leqslant 1$, the sequence $([u, v ; B_n f])_{n=1}^{\infty}$ is non-increasing. By the symbol $[u, v ; B_n f]$ we denote the divided difference at the points u, v. Likewise, it is shown that the divided difference of the Bernstein polynomial can be expressed in the form (2).

UNE PROPRIÉTÉ DES POLYNOMS DE BERNSTEIN

RÉSUMÉ

D. D. Stancu a démontré la propriété de monotonie pour les

$$(B_n f)'(x) - (B_{n+1} f)'(x) \geqslant 0$$

polynomes de Bernstein relativement à une fonction nonconcave Dans le présent travail les auteurs généralisent l'inégalité ci-dessus en prenant au lieu de la dérivée la difference divisée sur deux points du polynome de Bernstein.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara

MATEMATICĂ—FIZICĂ

Tom. 26 (40) **Fascicola 2**

INVARIANT TENSORS FOR TRANSFORMATIONS OF ALMOST COMPLEX FINSLER CONNECTIONS

BY

GHEORGHE ATANASIU and FRANCISC C. KLEPP

Dedicated to prof. Oct. Em. Gheorghiu on the occasion of his sixtieth birthday.

Primită la redacţie în 11.V.1980.

The set of almost complex Finsler connections was determined in [4] and in [1] was presented modifications in writing of the general form of this set, using the method of Prof. R. Miron and Prof. M. Hashiguchi [10]. In the present paper starting from the general family of almost complex Finsler connections (J-Finsler connections given by (2.5)) a subfamily called $J\binom{\lambda\mu}{\alpha\beta}$-Finsler connections is explicited. We also determine some of the invariants of the group of transformations between such connections, having a common non linear connection. For the $J\binom{10}{10}$-Finsler connections respectively the $J\binom{01}{01}$-Finsler connections these invariants are presented in the Theorem 4.1. and 5.1., the general case being presented by Theorem 5.3.

We remark that these transformation groups contain particularly the transformations of the Miron connections (notion introduced by M. Hashiguchi in [6] and generalized in the present paper by definition 1.1.) and the transformation of the Golab connections (see [5]) and definition 1.2.), when they are compatible with the almost complex Finsler structure.

Furthermore the studied Finsler connections are characterised by vanishing of the Finsler tensors $\underset{1}{N}{}^i_{jk}$ and $\underset{2}{N}{}^i_{jk}$ defined by the formulae (2.4) and (2.5) respectively. These tensors have the properties of the well known Nijenhuis tensor from the integrability problem of almost complex structures. (See [11], [13], and [2]).

Prof. M. Matsumoto's [7], [8] notations and terminology are used with slight modifications from [10].

1. Preliminaries

By Matsumoto [7], [8] a Finsler connection $F\Gamma$ on a differentiable C^∞-manifold M is defined in three equivalent manners: as a pair (Γ, N); as a pair (Γ^h, Γ^v) and as a triad (Γ_v, N, Γ^v), where Γ and Γ^h (resp. Γ^v) are a connection and horizontal (resp. vertical) connection in the Finsler bundle $F(M)$, N is a non-linear connection in the tangent bundle $T(M)$, and Γ_v is a V-connection in the linear frame bundle $L(M)$. Let Γ^i_{jk}, C^i_{jk} be the coefficients of Γ, N^i_j the coefficients of N and F^i_{jk} the coefficients of Γ_v. We denote by $F\Gamma = (N, F, C)$ the Finsler connection $F\Gamma$ having $(N^i_j, F^i_{jk}, C^i_{jk})$ as coefficients.

For a Finsler tensor field $K^i_j(x, y)$, where y is the supporting element in the point x, the h- and v- covariant differentiations are defined by :

$$\begin{cases} K^i_{j|k} = \dfrac{\delta K^i_j}{\delta x^k} - F^a_{jk}\ K^i_a + F^i_{ak}\ K^a_j \\ K^i_{j|k} = \dfrac{\partial K^i_j}{\partial x^k} - C^a_{jk}\ K^i_a + C^i_{ak}\ K^a_j \end{cases} \tag{1.1}$$

where :

$$\frac{\delta}{\delta x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} - N^a_i \frac{\partial}{\partial y^a}$$

The Ricci identities applying to K^i_j are :

$$\begin{cases} K^i_{j|k|l} - K^i_{j|l|k} = -K^i_a\ R^a_{jkl} + K^a_j\ R^i_{akl} - K^i_{j|a}\ R^a_{kl} - K^i_{j|a}\ T^a_{kl} \\ K^i_{j|k}|_l - K^i_{j|l|k} = -K^i_a\ P^a_{jkl} + K^a_j\ P^i_{akl} - K^i_{j|a}\ P^a_{kl} - K^i_{j|a}\ C^a_{kl} \\ K^i_{j|k}|_l - K^i_{j|l}|_k = -K^i_a\ S^a_{jkl} + K^a_j\ S^i_{akl} - K^i_{j|a}\ S^a_{kl} \end{cases} \tag{1.2}$$

where five torsion tensor fields R^1, P^1, S^1, T, C and three curvature tensor fields R^2, P^2, S^2 appear and their components are given by :

$$\begin{cases} R^i_{jk} = \dfrac{\delta N^i_j}{\delta x^k} - \dfrac{\delta N^i_k}{\delta x^j}\ ; \quad P^i_{jk} = \dfrac{\partial N^i_j}{\partial y^k} - F^i_{kj} \\ T^i_{jk} = F^i_{jk} - F^i_{kj}\ ; \quad S^i_{jk} = C^i_{jk} - C^i_{kj}\ ; \ C^i_{jk} \end{cases} \tag{1.3}$$

$$\begin{cases} R^i_{jkl} = \dfrac{\delta F^i_{jk}}{\delta x^l} - \dfrac{\delta F^i_{jl}}{\delta x^k} + F^v_{jk}\ F^i_{al} - F^a_{jl}\ F^i_{ak} + C^i_{ja}\ R^a_{kl} \\ P^i_{jkl} = \dfrac{\partial F^i_{jk}}{\partial y^l} - C^i_{jl|k} + C^i_{ja}\ P^a_{kl} \\ S^i_{jkl} = \dfrac{\partial C^i_{jk}}{\partial y^l} - \dfrac{\partial C^i_{jl}}{\partial y^k} + C^a_{jk}\ C^i_{al} - C^a_{jl}\ C^i_{ak} \end{cases} \tag{1.4}$$

If $F\Gamma = (N, F, C)$ and $F\bar{\Gamma} = (\bar{N}, \bar{F}, \bar{C})$ are two Finsler connections on M, then an unique triad of Finsler tensor fields A, B, D is determined [7], [8] by :

$$\bar{N}^i_j = N^i_j + A^i_j\ ; \quad \bar{F}^i_{jk} = F^i_{jk} - C^i_{ja}\ A^a_k + B^i_{jk}\ ; \ \bar{C}^i_{jk} = C^i_{jk} + D^i_{jk} \tag{1.5}$$

Reciprocally : if Finsler connection $F\Gamma$ and a triad of Finsler tensor fields A, B, D are given, then $F\bar{\Gamma}$ given by (1.5) is a Finsler connection. The mapping $F\Gamma \to F\bar{\Gamma}$ defined by the equalities (1.5) is called a transformation of Finsler connection. The group of this transformations is extensively treated in [9] and [10]. The transformations of Finsler connections, which preserve the non-linear connection N, are given by :

$$\bar{N}^i_j = N^i_j\ ; \ \bar{F}^i_{jk} = F^i_{jk} + B^i_{jk}\ ; \ \bar{C}^i_{jk} = C^i_{jk} + D^i_{jk} \tag{1.6}$$

and denoted by $F\Gamma(N) \to F\bar{\Gamma}(N)$.

We also note [10]:

$$K^i_{jkl}=R^i_{jkl}-C^i_{ja}\,R^a_{kl}\;;\;\mathbf{P}^i_{jkl}=P^i_{jkl}-P^i_{jlk}-C^i_{ja}\,t^a_{kl} \tag{1.7}$$

where t^i_{jk} is the torsion tensor of the N non-linear connection [8]. We have [10]:

Proposition 1.1. By a transformation (1.6) of Finsler connection $F\Gamma(N)\to$ $\to F\bar{\Gamma}(N)$ the tensor fields K^i_{jkl}, $\mathbf{P}^i_{jkl}$ and S^i_{jkl} are transformed as follows:

$$\begin{cases}\bar{K}^i_{jkl}=K^i_{jkl}+B^i_{ja}\,T^a_{kl}+B^i_{jk|l}+B^a_{jk}\,B^i_{al}-B^a_{jl}\,B^i_{ak}-B^i_{jl\,|k}\\ \bar{\mathbf{P}}^i_{jkl}=\mathbf{P}^i_{jkl}+B^i_{ja}\,S^a_{kl}+D^i_{ja}\,T^a_{kl}+B^i_{jk}|_l-B^i_{jl}|_k+D^i_{jk}{}'_l-D^i_{jl}{}'_k+\\ \qquad\qquad +B^a_{jk}\,D^i_{al}-B^a_{jl}\,D^i_{ak}+D^a_{jk}\,B^i_{al}-D^a_{jl}\,B^i_{ak}\\ \bar{S}^i_{jkl}=S^i_{jkl}+D^i_{ja}\,S^a_{kl}+D^i_{jk}|_l-D^i_{jl}|_k+D^a_{jk}\,D^i_{al}-D^a_{jl}\,D^i_{ak}\end{cases} \tag{1.8}$$

We give the following definitions:

Definition 1.1. A Finsler connection $F\Gamma(N)=(N, F, C)$ is called Miron connection if:

$$F^i_{jk}-F^i_{kj}=\delta^i_j p_k-\delta^i_k p_j\;;\;C^i_{jk}-C^i_{kj}=\delta^i_j q_k-\delta^i_k q_j, \tag{1.9}$$

where p_k and q_k are arbitrary Finsler covector fields.

This definition generalize M. Hashiguchi's definition on Miron connecions [6], where Miron connections $M\Gamma(p_k, q_k)$ are metric Finsler connections.

Definition 1.2. A Finsler connection $F\Gamma(N)=(N, F, C)$ is called Golab connection if:

$$F^i_{jk}-F^i_{kj}=t^i_j p_k-t^i_k p_j\;;\;C^i_{jk}-C^i_{kj}=t^i_j q_k-t^i_k q_j, \tag{1.10}$$

where p_k, q_k, t^i_j are arbitrary Finsler tensor fields.

2. J — Finsler connections

In the following considerations we suppose that the dimension of the manifold M is even and equal to $2n$.

Definition 2.1. We call almost complex Finsler structure on M_{2n} a Finsler tensor field $J^i_j(x, y)$ satisfying the following conditions:

$$J^a_j\,J^k_a=-\delta^k_j \tag{2.1}$$

$$\det\,[J^i_j(x, y)]\neq 0,\quad \forall\; y\neq 0. \tag{2.2}$$

Definition 2.2. A Finsler connection $F\Gamma=(N, F, C)$ is called almost complex or compatible with the almost complex Finsler structure (J-Finsler connection) if and only if:

$$J^i_{j'k}=0\;;\quad J^i_{j}|_k=0 \tag{2.3}$$

For an almost complex Finsler structure we introduce the following Finsler tensors:

$$N^i_{1\,jk}=J^a_j\,(\delta_a J^i_k-\delta_k J^i_a)-J^a_k\,(\delta_a J^i_j-\delta_j J^i_a) \tag{2.4}$$

$$N^i_{2\,jk}=J^a_j\,(\partial_a J^i_k-\partial_k J^i_a)-J^a_k\,(\partial_a J^i_j-\partial_j J^i_a) \tag{2.5}$$

From (1.1), (1.3), (2.3), (2.4) and (2.5) we have immediately :

Proposition 2.1. For any J-Finsler connection the Finsler tensors $\underset{1}{N}{}^i_{jk}$ and $\underset{2}{N}{}^i_{jk}$ have the following form :

$$\underset{1}{N}{}^i_{jk} = -T^i_{jk} + J^a_j J^b_k T^i_{ab} - T^a_{jb} J^b_k J^i_a - J^a_j T^b_{ak} J^i_b \tag{2.4'}$$

$$\underset{2}{N}{}^i_{jk} = -S^i_{jk} + J^a_j J^b_k S^i_{ab} - S^a_{jb} J^b_k J^i_a - J^a_j S^b_{ak} J^i_b \tag{2.5'}$$

We can attache the K. Yano–M. Obata [12],[15] operators to an almost complex Finsler connection :

$$\underset{1}{Q}{}^{kh}_{ij} = \frac{1}{2}(\delta^k_i \delta^h_j - J^k_i J^h_j) ; \quad \underset{2}{Q}{}^{kh}_{ij} = \frac{1}{2}(\delta^k_i \delta^h_j + J^k_i J^h_j) \tag{2.6}$$

These operators have the well known properties ([3], vol. II, p. 168). We have [1] :

Proposition 2.2. All the almost complex Finsler connections are given by :

$$\begin{cases} N^i_j = \overset{\circ}{N}{}^i_j - X^i_j ; \; C^i_{jk} = \overset{\circ}{C}{}^i_{jk} + \frac{1}{2} J^a_j (J^i_a \overset{\circ}{|}_k) + \underset{1}{Q}{}^{ai}_{jb} Z^b_{ak} ; \\ F^i_{jk} = \overset{\circ}{F}{}^i_{jk} + \overset{\circ}{C}{}^i_{ja} X^a_k + \frac{1}{2} J^a_j [(J^i_a \overset{\circ}{|}_k) + (J^i_a \overset{\circ}{|}_b) X^b_k] + \underset{1}{Q}{}^{ai}_{jb} Y^b_{ak} \end{cases} \tag{2.7}$$

where $F\overset{\circ}{\Gamma}$ is a fixed Finsler connection, $\overset{\circ}{|}$ and $\overset{\circ}{|}$ are the h- and v-covariant differentiations in respect to $F\overset{\circ}{\Gamma}$, and X^i_j, Y^i_{jk}, Z^i_{jk} are arbitrary Finsler tensors.

Proposition 2.3. If $F\overset{\circ}{\Gamma}$ is a fixed J-Finsler connection with the non-linear connection $\overset{\circ}{N}$, then all the J-Finsler connections $F\Gamma(\overset{\circ}{N})$ are given by :

$$N^i_j = \overset{\circ}{N}{}^i_j ; \; F^i_{jk} = \overset{\circ}{F}{}^i_{jk} + \underset{1}{Q}{}^{ai}_{jb} Y^b_{ak} ; \; C^i_{jk} = \overset{\circ}{C}{}^i_{jk} + \underset{1}{Q}{}^{ai}_{jd} Z^b_{ak} \tag{2. 8}$$

where Y^i_{jk} and Z^i_{jk} are arbitrary Finsler tensors.

Proposition 2.4. The transformations between J-Finsler connections having the same non-linear connection N, are given by :

$$\bar{N}^i_j = N^i_j ; \; \bar{F}^i_{jk} = F^i_{jk} + \underset{1}{Q}{}^{ai}_{jb} \tilde{Y}^b_{ak} ; \; \bar{C}^i_{jk} = C^i_{jk} + \underset{1}{Q}{}^{ai}_{jb} \tilde{Z}^b_{ak} \tag{2.9}$$

where $\tilde{Y}^i_{jk}$, $\tilde{Z}^i_{jk}$ are arbitrary Finsler tensors. The set of transformations (2.9) is a group with respect tc the mapping product, and this G_{ac} group is isomorphic to the additive group of the paire of Finsler tensors of the form $(\underset{1}{Q}{}^{ai}_{bj} \tilde{Y}^b_{ak}, \underset{1}{Q}{}^{ai}_{jb} \tilde{Z}^b_{ak})$.

3. $\mathbf{J}^{(\lambda\mu)}_{(\alpha\beta)}$ — Finsler connections

We take in (2.7) the Finsler tensor fields Y^i_{jk}, Z^i_{jk} of the form :

$$Y^i_{ik} = (\lambda \delta^i_j + \mu J^i_j)\sigma_k ; \quad Z^i_{jk} = (\alpha \delta^i_j + \beta J^i_j)\tau_k$$

From (2.6) we have :

Theorem 3.1. If $F\overset{\circ}{\Gamma}$ is a fixed J-Finsler connection on M_{2n}, λ, μ, α, $\beta \in R$ and σ_k, τ_k, X^i_k are arbitrary Finsler tensors, then the following Finsler connections are J-Finsler connections:

$$\begin{cases} N^i_j = \overset{\circ}{N}{}^i_j - X^i_j\,; \quad C^i_{jk} = \overset{\circ}{C}{}^i_{jk} + (\alpha\delta^i_j + \beta J^i_j)\,\tau_k\,; \\ F^i_{jk} + \overset{\circ}{F}{}^i_{jk} + \overset{\circ}{C}{}^i_{ja} X^a_k + (\lambda\delta^i_j + \mu J^i_j)\,\sigma_k \end{cases} \tag{3.1}$$

Definition 3.1. The J-Finsler connections which are given by the formulae (3.1) are called $J\binom{\lambda\mu}{\alpha\beta}$ -Finsler connections.

Proposition 3.2. If $F\overset{\circ}{\Gamma}$ is a fixed J-Finsler connection with the non-linear connection $\overset{\circ}{N}$, then the set of all $J\binom{\lambda\mu}{\alpha\beta}$ -Finsler connections $F\Gamma(\overset{\circ}{N})$ is given by:

$$\begin{cases} N^i_j = \overset{\circ}{N}{}^i_j\,; \; F^i_{jk} = \overset{\circ}{F}{}^i_{jk} + (\lambda\delta^i_j + \mu J^i_j)\,\sigma_k\,; \\ C^i_{jk} = \overset{\circ}{C}{}^i_{jk} + (\alpha\delta^i_j + \beta J^i_j)\,\tau_k \end{cases} \tag{3.2}$$

Proposition 3.3. The transformations group $G_{ac}\binom{\lambda\mu}{\alpha\beta}$ between J-Finsler connections $F\Gamma(N) \to F\bar{\Gamma}(N)$, having the same non-linear connection N and the same constants λ, μ, α, $\beta \in R$ is given by:

$$\begin{cases} \bar{N}^i_j = N^i_j\,; \; \bar{F}^i_{jk} = F^i_{jk} + (\lambda\delta^i_j + \mu J^i_j)\,p_k\,; \\ \bar{C}^i_{jk} = C^i_{jk} + (\alpha\delta^i_j + \beta J^i_j)\,q_k \end{cases} \tag{3.3}$$

where p_k and q_k are arbitrary Finsler convectors.

From (1.3) and the propositions 1.1 and 3.3. we have:

Theorem 3.4. By a transformation (3.3) of the $J\binom{\lambda\mu}{\alpha\beta}$ -Finsler connections $F\Gamma(N) \to F\bar{\Gamma}(N)$, the tensor fields T^i_{jk}, $\mathbf{S}^i_{jk}$, K^i_{jkl}, $\mathbf{P}^i_{jkl}$, S^i_{jkl} are transformated as follows:

$$\begin{cases} \bar{T}^i_{jk} = T^i_{jk} + (\lambda\delta^i_j + \mu J^i_j)\,p_k - (\lambda\delta^i_k + \mu J^i_k)\,p_j \\ \bar{S}^i_{jk} = S^i_{jk} + (\alpha\delta^i_j + \beta J^i_j)\,q_k - (\alpha\delta^i_k + \beta J^i_k)\,q_j \end{cases} \tag{3.4}$$

$$\begin{cases} \bar{K}^i_{jkl} = K^i_{jkl} + (\lambda\delta^i_j + \mu J^i_j)\,p_{kl} \\ \bar{\mathbf{P}}^i_{jkl} = \mathbf{P}^i_{jkl} + (\lambda\delta^i_j + \mu J^i_j)\,u_{kl} + (\alpha\delta^i_j + \beta J^i_j)\,v_{kl} \\ \bar{S}^i_{jkl} = S^i_{jkl} + (\alpha\delta^i_j + \beta J^i_j)\,q_{kl} \end{cases} \tag{3.5}$$

where we note:

$$\begin{cases} p_{kl} = p_k\,|_l - p_l\,|_k + p_a T^a_{kl}\,; \quad q_{kl} = q_k\,|_l - q_l\,|_k + q_a S^a_{k|l} \\ u_{kl} = p_k\,|_l - p_l\,|_k + p_a S^a_{kl}\,; \quad v_{kl} = q_{k|l} - q_{l|k} + q_a T^a_{kl} \end{cases} \tag{3.6}$$

4. $\mathbf{J}\binom{10}{10}$ — Finsler connections.

From (3.1) for $\lambda=1$, $\mu=0$, $\alpha=1$, $\beta=0$, we obtain the family of $J\binom{10}{10}$ -Finsler connections in the form:

$$N^i_j = \overset{\circ}{N}{}^i_j - X^i_j\,; \; F^i_{jk} = \overset{\circ}{F}{}^i_{jk} + \overset{\circ}{C}{}^i_{ja} X^a_k + \delta^i_j\,\sigma_k\,; \; C^i_{jk} = \overset{\circ}{C}{}^i_{jk} + \delta^i_j \tau_k \tag{4.1}$$

which depend on the Finsler tensors X^i_k, σ_k, τ_k. It follow that the all $J\binom{10}{10}$-Finsler connections $F\Gamma(\overset{\circ}{N})$ are given by:

$$N^i_j=\overset{\circ}{N}{}^i_j\ ;\ F^i_{jk}=\overset{\circ}{F}{}^i_{jk}+\delta^i_j\sigma_k\ ;\ C^i_{jk}=\overset{\circ}{C}{}^i_{jk}+\delta^i_j\,\tau_k \tag{4.2}$$

and the transformations of $J\binom{10}{10}$-Finsler connections $F\Gamma(N)\to F\bar{\Gamma}(N)$ are given by:

$$\bar{N}^i_j=N^i_j\ ;\ \bar{F}^i_{jk}=F^i_{jk}+\delta^i_j\,p_k\ ;\ \bar{C}^i_{jk}=C^i_{jk}+\delta^i_j\,q_k. \tag{4.3}$$

The set of these transformations is a group $G_{ac}\binom{10}{10}$ isomorphic to the additive group of the paire of Finsler tensors $(p_k,\ q_k)$.

Theorem 4.1. The following Finsler tensor fields are invariants of the group $G_{ac}\binom{10}{10}$:

$$\begin{cases} t^i_{jk}\ ; \qquad R^i_{jk} \\ \mathfrak{T}^i_{ik}\binom{10}{10}=T^i_{jk}-\dfrac{1}{2n-1}\,(\delta^i_jT_k-\delta^i_kT_j)\ ;\ \mathfrak{S}^i_{ik}\binom{10}{10}=S^i_{jk}-\dfrac{1}{2n-1}\,(\delta^i_jS_k-\delta^i_kS_j) \end{cases} \tag{4.4}$$

$$\begin{cases} \underset{1}{\mathfrak{K}}{}^i_{jkI}\binom{10}{10}=K^i_{jkI}-\dfrac{1}{2n}\,\delta^i_jK^a_{akI}\ ;\ \underset{1}{\mathfrak{P}}{}^i_{jkI}\binom{10}{10}=\mathbf{P}^i_{jkI}-\dfrac{1}{2n}\,\delta^i_j\,\mathbf{P}^a_{akI} \\ \underset{1}{\mathfrak{S}}{}^i_{jkI}\binom{10}{10}=S^i_{jkI}-\dfrac{1}{2n}\,\delta^i_j\,S^a_{akI} \end{cases} \tag{4.5}$$

$$\begin{cases} \underset{2}{\mathfrak{K}}{}^i_{jkI}\binom{10}{10}=K^i_{jkI}-\dfrac{1}{S}\,\delta^i_j\,J^a_b\,K^b_{akI}\ ;\ \underset{2}{\mathfrak{P}}{}^i_{jkI}\binom{10}{10}=\mathbf{P}^i_{jkI}-\dfrac{1}{S}\,\delta^i_j\,J^a_b\,\mathbf{P}^b_{akI} \\ \underset{2}{\mathfrak{S}}{}^i_{jki}\binom{10}{10}=S^i_{jkI}-\dfrac{1}{S}\,\delta^i_j\,J^a_b\,S^b_{akI} \end{cases} \tag{4.6}$$

$$\begin{cases} \underset{3}{\mathfrak{K}}{}^i_{jkI}\binom{10}{10}=K^i_{jkI}-\delta^i_j\,K^a_{Ika}\ ;\ \underset{3}{\mathfrak{P}}{}^i_{jkI}\binom{10}{10}=\mathbf{P}^i_{jkI}-\delta^i_j\,\mathbf{P}^a_{Ika} \\ \underset{3}{\mathfrak{S}}{}^i_{jkI}\binom{10}{10}=S^i_{jkI}-\delta^i_j\,S^a_{Ika} \end{cases} \tag{4.7}$$

where $T_k=T^a_{ak}$; $S_k=S^a_{ak}$ and $s=J^a_a(\neq 0)$.

Remark 4.1. The subgroup $\overset{M}{G}_{ac}\binom{10}{10}$ of $G_{ac}\binom{10}{10}$ given by:

$$\overset{M}{G}_{ac}\binom{10}{10}=\{l\in G_{ac}\binom{10}{10}\mid \mathfrak{T}^i_{jk}\binom{10}{10}=0\ ;\ \mathfrak{S}^i_{jk}\binom{10}{10}=0\}$$

is formed from transformations between J-Miron connections.

Indeed, the conections from $\overset{M}{G}_{ac}\binom{10}{10}$ are the properties:

$$J^i_{j|k}=0,\quad J^i_j|_k=0,\quad N^i_j=\overset{\circ}{N}{}^i_j\qquad\text{(fixed)} \tag{4.8}$$

$$F^i_{jk}-F^i_{kj}=\delta^i_j\,p_k-\delta^i_k\,p_j\ ;\ C^i_{jk}-C^i_{kj}=\delta^i_j\,q_k-\delta^i_kq_j \tag{4.9}$$

where:

$$P_k=\frac{T_k}{2n-1}\ ;\ q_k=\frac{S_k}{2n-1}\ ;\ T_k=T^a_{ak}\ ;\ S_k=S^a_{ak}$$

From the proposition 2.1. and (4.9) a direct calculus we lead to.

Theorem 4.2. For any J-Miron connection we have :

$$\overset{M}{N}{}^i_{1\,jk}=0\ ;\quad \overset{M}{N}{}^i_{2\,jk}=0 \tag{4.10}$$

5. $J\binom{10}{10}$ — Finsler connections.

From (3.1) for $\lambda=0$, $\mu=1$, $\alpha=0$, $\beta=1$, we obtain the family of $J\binom{01}{01}$-Finsler connections in the form :

$$N^i_j=\overset{\circ}{N}{}^i_j-X^i_j\ ;\ F^i_{jk}=\overset{\circ}{F}{}^i_{jk}+\overset{\circ}{C}{}^i_{ja}X^a_k+J^i_j\,\sigma_k\ ;\ C^i_{jk}=\overset{\circ}{C}{}^i_{jk}+J^i_j\,\tau_k \tag{5.1}$$

which depend on the Finsler tensors X^i_k, σ_k, τ_k.

It follows that the all $J\binom{01}{01}$-Finsler connections $F\Gamma(\overset{\circ}{N})$ are given by :

$$N^i_j=\overset{\circ}{N}{}^i_j\ ;\ F^i_{jk}=\overset{\circ}{F}{}^i_{jk}+J^i_j\sigma_k\ ;\ C^i_{jk}=\overset{\circ}{C}{}^i_{jk}+J^i_j\,\tau_k \tag{5.2}$$

and the transformations of $J\binom{01}{01}$-Finsler connections $F\Gamma(N)\to F\bar{\Gamma}(\bar{N})$ are given by :

$$\bar{N}^i_j=N^i_j\ ;\ \bar{F}^i_{jk}=F^i_{jk}+J^i_j\,p_k\ ;\ \bar{C}^i_{jk}=C^i_{jk}+J^i_j\,q_k \tag{5.3}$$

The set of these transformations is a group $G_{ac}\binom{01}{01}$ isomorphic to the additive group of the paire of Finsler tensors $(p_k,\ q_k)$.

Theorem 5.1. The following Finsler tensor fields are invariants of the group $G_{ac}\binom{01}{01}$:

$$\begin{cases} t^i_{jjk}\ ; \qquad R^i_{jk} \\ \mathcal{T}^i_{jk}\binom{01}{01}=T^i_{jk}-\dfrac{1}{2n-1}\,(J^i_j\,T^a_{kb}-J^i_k\,T^a_{jb})\,J^a_b \\ \mathcal{S}^i_{jk}\binom{01}{01}=S^i_{jk}-\dfrac{1}{2n-1}\,(J^i_j\,S^a_{kb}-J^i_k\,S^a_{jb})\,J^b_a \end{cases} \tag{5.4}$$

$$\begin{cases} \overset{1}{\mathcal{K}}{}^i_{jkl}\binom{01}{01}=K^i_{jkl}-\dfrac{1}{S}\,J^i_j\,K^a_{akl}\ ;\quad \overset{2}{\mathcal{K}}{}^i_{jkl}\binom{01}{01}=K^i_{jkl}+\dfrac{1}{2n}\,J^i_j\,J^a_b\,K^b_{akl} \\ \overset{3}{\mathcal{K}}{}^i_{jkl}\binom{01}{01}=K^i_{jkl}+J^i_j\,J^a_b\,K^b_{lka} \end{cases} \tag{5.5}$$

and their analoguous in $\mathbf{P}^i_{jkl}$ and S^i_{jkl}.

Remark 5.1. The subgroup $\overset{G}{G}_{ac}\binom{01}{01}$ of $G_{ac}\binom{01}{01}$ given by :

$$\overset{G}{G}_{ac}\binom{01}{01}=\{t\in G_{ac}\binom{01}{01}\,|\,\mathcal{T}^i_{jk}\binom{01}{01}=0\ ;\quad \mathcal{S}^i_{jk}\binom{01}{01}=0\}$$

is formed from transformations between J-Golab connections.

Indeed, the connections from $\overset{G}{G}_{ac}\binom{01}{01}$ have the properties :

$$J^i_{j\,|k}=0\ ;\quad J^i_j|_k=0\ ;\quad N^i_j=\overset{\circ}{N}{}^i_j\ \text{(fixed)} \tag{5.6}$$

$$F^i_{jk}-F^i_{kj}=t^i_j\,p_k-t^i_k\,p_j\ ;\ C^i_{jk}-C^i_{kj}=t^i_j\,q_k-t^i_k\,q_j \tag{5.7}$$

where :

$$t^i_j = J^i_j\ ;\ p_k = \frac{J^a_b\, T^b_{ka}}{2n-1}\ ;\ q_k = \frac{J^a_b\, S^b_{ka}}{2n-1}$$

From the proposition 2.1. and the relations (5.7) a direct calculus we lead to :

Theorem 5.2. For any J-Golab connections we have :

$$\overset{G}{N}{}^i_{1\,jk} = 0\ ;\quad \overset{G}{N}{}^i_{2\,jk} = 0 \tag{5.8}$$

The proof. of the theorems 4.1 and 5.1. can be realized directly, or these theorems results as a particularisation of the following.

Theorem 5.3. For $2n\lambda + s\mu \neq 0$, $s\lambda - 2n\mu \neq 0$ and $2n\alpha + s\beta \neq 0$, $s\alpha - 2n\beta \neq 0$ $(s = J^a_a)$, the following Finsler tensors are invariants of the group $G_{ac}\binom{\lambda\mu}{\alpha\beta}$:

$$\begin{cases} t^i_{jk}\ ; \qquad R^i_{jk} \\ \mathcal{T}^i_{jk}\binom{\lambda\mu}{\alpha\beta} = T^i_{jk} - \dfrac{1}{(\lambda^2+\mu^2)(2n-1)}\,[1(\lambda\delta^i_j + \mu J^i_j)\,(\lambda T_k + \mu J^a_b\, T^b_{ka}) - \\ \qquad - (\lambda\delta^i_k + \mu J^i_k)(\lambda T_j + \mu^a_b\, T^b_{ja})] \\ \mathcal{S}^i_{jk}\binom{\lambda\mu}{\alpha\beta} = S^i_{jk} - \dfrac{1}{(\alpha^2+\beta^2)(2n-1)}\,[(\alpha\delta^i_j + \beta J^i_j)\,(\alpha T_k + \beta J^a_b\, T^b_{ka}) - \\ \qquad - (\alpha\delta^i_k + \beta J^i_k)\,(\alpha T_j + \beta J^a_b\, T^b_{ja})] \end{cases} \tag{5.9}$$

$$\begin{cases} \underset{1}{\mathcal{K}}{}^i_{jkl}\binom{\lambda\mu}{\alpha\beta} = K^i_{jkl} - \dfrac{1}{2n\lambda + s\mu}\,(\lambda\delta^i_j + \mu J^i_j)\, K^a_{akl} \\ \underset{1}{\mathcal{P}}{}^i_{jkl}\binom{\lambda\mu}{\alpha\beta} = \mathbf{P}^i_{jkl} - \dfrac{1}{2n\alpha + s\beta}\,(\alpha\delta^i_j + \beta J^i_j)\, \mathbf{P}^a_{aki} \\ \underset{1}{\mathcal{S}}{}^i_{jkl}\binom{\lambda\mu}{\alpha\beta} = S^i_{jkl} - \dfrac{1}{2n\alpha + s\beta}\,(\alpha\delta^i_j + \beta J^i_j)\, S^a_{akl} \end{cases} \tag{5.10}$$

$$\begin{cases} \underset{2}{\mathcal{K}}{}^i_{jkl}\binom{\lambda\mu}{\alpha\beta} = K^i_{jkl} - \dfrac{1}{s\lambda - 2n\mu}\,(\lambda\delta^i_j + \mu J^i_j) J^a_b\, K^b_{akl} \\ \underset{1}{\mathcal{P}}{}^i_{jkl}\binom{\lambda\mu}{\alpha\beta} = \mathbf{P}^i_{jkl} - \dfrac{1}{s\alpha - 2n\beta}\,(\alpha\delta^i_j + \beta J^i_j)\, J^a_b\, \mathbf{P}^b_{akl} \\ \underset{2}{\mathcal{S}}{}^i_{jkl}\binom{\lambda\mu}{\alpha\lambda} = S^i_{jkl} - \dfrac{1}{s\alpha - 2n\beta}\,(\alpha\delta^i_j + \beta J^i_j)\, J^a_b\, S^b_{akl} \end{cases} \tag{5.11}$$

$$\begin{cases} \underset{3}{\mathcal{K}}{}^i_{jkl}\binom{\lambda\mu}{\alpha\beta} = K^i_{jkl} - \dfrac{1}{\lambda^2+\mu^2}\,(\lambda\delta^i_j + \mu J^i_j)\,(\lambda K^a_{lka} - \mu J^a_b\, K^b_{lka}) \\ \underset{3}{\mathcal{P}}{}^i_{jkl}\binom{\lambda\mu}{\alpha\beta} = \mathbf{P}^i_{jkl} - \dfrac{1}{\alpha^2+\beta^2}\,(\alpha\delta^i_j + \beta J^i_j)\,(\alpha \mathbf{P}^a_{lka} - \beta J^a_b\, \mathbf{P}^b_{lka}) \\ \underset{3}{\mathcal{S}}{}^i_{jkl}\binom{\lambda\mu}{\alpha\beta} = S^i_{jkl} - \dfrac{1}{\alpha^2+\beta^2}\,(\alpha\delta^i_j + \beta J^i_j)\,(\alpha S^a_{lka} - \beta J^a_b\, S^b_{lka}) \end{cases} \tag{5.12}$$

Proof. Because the transformation of the group $G_{ac}\binom{\lambda\mu}{\alpha\beta}$ preserve the non-linear connection N, it follows that the t^i_{jk} and R^i_{jk} are invariants of this group.

We shall show in the following, the procedure for obtaining the invariant $\underset{3}{\mathfrak{P}}{}^{i}_{jkl}\binom{\alpha\beta}{\alpha\beta}$, all other invariants being obtained analoguously. From the Theorem 3.4., we have for $\lambda=\alpha$ and $\mu=\beta$

$$\overline{\mathbf{P}}^{i}_{jkl}=\mathbf{P}^{i}_{jkl}+(\alpha\delta^{i}_{j}+\beta J^{i}_{j})\, r_{kl} \tag{5.13}$$

where $r_{kl}=u_{kl}+v_{kl}$; u_{kl} and v_{kl} being given by (3.6).

From the (5.19) we evidently have :

$$J^{i}_{a}\,\overline{\mathbf{P}}^{a}_{jkl}=J^{i}_{a}\,\mathbf{P}^{a}_{jkl}+(\alpha J^{i}_{j}-\beta\delta^{i}_{j})\, r_{kl} \tag{5.14}$$

By the contraction $i=l$ in the (5.19) and by addition we have evidently :

$$\overline{\mathbf{P}}^{a}_{jka}=\mathbf{P}^{a}_{jka}+\alpha r_{kj}+\beta J^{a}_{j}\, r_{ka} \tag{5.15}$$

and by the same way in (5.14) we have :

$$J^{a}_{b}\,\overline{\mathbf{P}}^{b}_{jka}=J^{a}_{b}\,\mathbf{P}^{b}_{jka}+\alpha J^{a}_{j} r_{ka}-\beta r_{kj} \tag{5.16}$$

Multiplying (5.15) and (5.16) by α respectively β and subtracting this equalities, we can give the explicit form of the tensor r_{kj} :

$$r_{kj}=\frac{1}{\alpha^{2}+\beta^{2}}\left[\alpha\,(\overline{\mathbf{P}}^{a}_{jka}-\mathbf{P}^{a}_{jka})-\beta J^{a}_{b}(\overline{\mathbf{P}}^{b}_{jka}-\mathbf{P}^{b}_{jka})\right] \tag{5.17}$$

Replacing r_{kj} given by (5.17) in (5.13) and separating the barred quantities we obtain :

$$\underset{3}{\overline{\mathfrak{P}}}{}^{i}_{jkl}\binom{\alpha\beta}{\alpha\beta}=\underset{3}{\mathfrak{P}}{}^{i}_{jkl}\binom{\alpha\beta}{\alpha\beta}$$

where $\underset{3}{\mathfrak{P}}{}^{i}_{jkl}\binom{\alpha\beta}{\alpha\beta}$ is given by (5.12).

Finally we remark that if we consider the subgroup $\overset{*}{G}_{ac}\binom{\lambda\mu}{\alpha\beta}$ of $G_{ac}\binom{\lambda\mu}{\alpha\beta}$, given by :

$$\overset{*}{G}_{ac}\binom{\lambda\mu}{\alpha\beta}=\{t\in G_{ac}\binom{\lambda\mu}{\alpha\lambda}\,|\,\mathfrak{F}^{i}_{jk}\binom{\lambda\mu}{\alpha\beta}=0\ ;\ \mathfrak{F}^{i}_{jk}\binom{\lambda\mu}{\alpha\beta}=0\}$$

then it is formed from the transformations between these $\overset{*}{J}\binom{\lambda\mu}{\alpha\beta}$ -Finsler connections which have the properties :

$$J^{i}_{j\,|k}=0\ ;\quad J^{i}_{j}|_{k}=0\ ;\quad N^{i}_{j}=\overset{\circ}{N}{}^{i}_{j}\ \text{(fixed)} \tag{5.18}$$

$$\begin{cases} F^{i}_{jk}-F^{i}_{kj}=(\lambda\delta^{i}_{j}+\mu\ t^{i}_{j})\, p_{k}-(\lambda\delta^{i}_{k}+\mu t^{i}_{k})\, p_{j} \\ C^{i}_{jk}-C^{i}_{kj}=(\alpha\delta^{i}_{j}+\beta t^{i}_{j})\, q_{k}-(\alpha\delta^{i}_{k}+\beta t^{i}_{k})\, q_{j} \end{cases} \tag{5.19}$$

where : $t^{i}_{j}=J^{i}_{j}$;

$$p_{k}=\frac{1}{(\lambda^{2}+\mu^{2})\,(2n-1)}\,(\lambda T_{k}+\mu J^{a}_{b}\, T^{b}_{ka})$$

$$q_{k}=\frac{1}{(\alpha^{2}+\beta^{2})\,(2n-1)}\,(\alpha S_{k}+\beta J^{a}_{b}\, S^{b}_{ka})$$

From the Theorems 4.2. and 5.2. and from the linear character of the relations (5.19) results :

Theorem 5.4. For any $\overset{*}{J}\binom{\lambda\mu}{\alpha\beta}$-Finsler connection we have:

$$\underset{1}{\overset{*}{N}}{}^{i}_{jk}=0 \qquad \underset{2}{\overset{*}{N}}{}^{i}_{jk}=0 \tag{5.20}$$

Remark 5.2. The class of the J-Finsler connections having the property that $\underset{1}{N}{}^{i}_{jk}=0$ and $\underset{2}{N}{}^{i}_{jk}=0$ is moor large. Particularly, when the tensor field J^i_j depends only by $x \in M$ it was obtained in [2].

REFERENCES

[1] Atanasiu Gh., Structures et connexions Finsler presque complexes et presque hermitiennes. Seminaire d'espace Finsler Brașov, 1980. (to appear).

[2] Atanasiu Gh., Sur certaines classes spéciales de connexions presque complexes. C.R. Acad. Sc. Paris, t. 290, Ser. A (1980) p. 1013–1016.

[3] Gheorghiev Gh., Oproiu V., Varietăți diferențiabile finit și infinit dimensionale. Ed. Acad. R.S.R. Buc. Vol. I (1976), Vol. II (1979).

[4] Ghinea I., Connexions finsleriennes presque complexes. Mathematica, Cluj-Napoca, 19 (42) s.1 (1977) p. 55–61.

[5] Golab S., On semi-symmetric and quarter-symmetric liniar connections. Tensor N.S., vol. 29, N. 3, (1975), p. 249–254.

[6] Hashiguchi M., Wagner connections and Miron connections. Publ. Study Symp. on Finsler Geom. at Hakone (1979).

[7] Matsumoto M., The theory of Finsler connections. Publ. Study Group Geom. 5, Okayama Univ., (1970).

[8] Matsumoto M., Foundations of Finsler geometry and special Finsler spaces. VEB Deutsch Verlag Berlin (to appear).

[9] Miron R., On transformation groups of Finsler connections Tensor (1979, to appear).

[10] Miron R., Hashiguchi M., Metrical Finsler connections Rep. Fac. Sc. Kagoshima Univ., 12 (1979), p. 21–35.

[11] Nițescu Catalina., Spații cu conexiune metrică. Teză de doctorat. Cluj-Napoca, (1979).

[12] Obata M., Affine connections on manifolds with almost complex, quaternion or Hermitian structure. Jap. J. Math. 26 (1957), p. 43–77.

[13] Oproiu V., Some remarcable structures and connections defined of the tangent bundle. Rend. di matem. (3), 6.VI. (1973), p. 503–540.

[14] Vamanu Elena, Atanasiu Gh., Asupra transformărilor de conexiuni aproape complexe. Bul. C.J.I.T. Brașov, 1980.

[15] Yano K., Differential geometry on complex and almost complex spaces. Pergamon Pres, (1965).

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara

MATEMATICĂ—FIZICĂ

Tom. 26 (40) Fascicola 2

ASUPRA APLICAŢIILOR MULTIVOCE APROAPE-PERIODICE CU VALORI ÎN SPAŢII UNIFORME

DE

T. BÂNZARU şi N. CRIVĂŢ

În semn de omagiu profesorului Oct. Em. Gheorghiu la a 60-a aniversare

Primită la redacţie în 28.IV.1986.

În [2] se defineşte noţiunea de aplicaţie multivocă aproape-periodică pentru o aplicaţie multivocă $F : R \to (X, \mathfrak{H})$, unde $(X, \mathfrak{H})$ este un spaţiu uniform.

Scopul acestei lucrări este de a da o generalizare la aplicaţiile multivoce a noţiunii de normalitate şi de a caracteriza aplicaţiile multivoce aproape-periodice cu ajutorul acestei noţiuni.

În cele ce urmează, aplicaţiile multivoce vor fi considerate continue în sensul [3] şi cu valori compacte.

I. Noţiuni preliminarii.

Definiţia I.1. ([2]). Aplicaţia multivocă $F : R \to (X, \mathfrak{H})$ se numeşte aproape-periodică, dacă pentru orice $H \in \mathfrak{H}$, există $\iota(H) > 0$, astfel încît în orice interval de lungime $l(H)$, există un număr τ cu proprietatea :

$$F(x+\tau) \subset H(F(x)),\ \forall y \in F(x),\ H(y) \cap F(x+\tau) \neq \varnothing,\ \forall x \in R$$

Definiţia I.2. Aplicaţia multivocă $F : R \to (X, \mathfrak{H})$ se numeşte normală dacă din orice şir de forma $(F(x+h_n))_{n \in N}$, se poate extrage un subşir uniform convergent pe R.

Definiţia I.3. Şirul $(F_n)_{n \in N}$ de aplicaţii multivoce definite pe R cu valori în $(X, \mathfrak{H})$ se numeşte şir uniform Cauchy dacă :

$$\forall H \in \mathfrak{H},\ \exists m(H) \in N : p, q \geqslant m(H),\ p, q \in N \Rightarrow$$
$$\Rightarrow F_p(x) \subset H(F_q(x)),\ \forall y \in F_q(x),\ H(y) \cap F_p(x) \neq \varnothing,\ \forall x \in R$$

Lema următoare stabileşte legătura şirurilor uniform convergente cu şirurile uniform Cauchy analoagă celei de la funcţii.

Lema I.1. Orice şir de aplicaţii multivoce uniform convergent este uniform Cauchy.

Demonstraţie. Fie $H \in \mathfrak{H}$ şi H' anturaj simetric cu $H' \circ H' \subset H$. Şirul $(F_n)_{n \in N}$ fiind uniform convergent pe R, există $m(H') \in N$ astfel încît pentru orice $n \geqslant m(H')$, $n \in N$ avem :

$$F_n(x) \subset H'(F(x)),\ \forall y \in F(x),\ H'(y) \cap F_n(x) \neq \varnothing \quad \forall x \in R, \tag{I.1}$$

unde $F : R \to (X, \mathfrak{H})$ este aplicaţia multivocă limită a şirului F_n.

Fie $p, q \geqslant m$ (H'). Atunci din (I.1) avem :

$$F_p(x) \subset H'(F(x)),\ \forall y \in F(x),\ H'(y) \cap F_p(x) \neq \varnothing,\quad \forall x \in R \tag{I.2}$$

$$F_q(x) \subset H'(F(x)),\ \forall y \in F(x),\ H'(y) \cap F_q(x) \neq \varnothing,\quad \forall x \in R \tag{I.3}$$

Fie $u \in F_p(x)$. Din (I.2) rezultă că există $v \in F(x)$ astfel încît $(v, u) \in H'$. Din (I.3) rezultă : $H'(v) \cap F_q(x) \neq \varnothing$, $\forall x \in R$. Deci există $s \in F_q(x)$ astfel ca $(s, v) \in H'$. Atunci $(s, u) \in H' \circ H' \subset H$, adică $u \in H(s)$. Aşadar

$$F_p(x) \subset H(F_q(x)),\quad \forall x \in R \tag{I.4}$$

Fie acum $y \in F_q(x)$. Din (I.3) rezultă că există $z \in F(x)$ astfel ca $(y, z) \in H'$. Din (I.2), avem atunci, $H'(z) \cap F_p(x) \neq \varnothing$, $\forall x \in R$ ceea ce implică existenţa unui $w \in F_p(x)$ astfel încît $(z, w) \in H'$. Putem atunci scrie, că : $(y, w) \in H' \circ H' \subset H$, adică

$$H(y) \cap F_p(x) \neq \varnothing,\quad \forall x \in R \tag{I.5}$$

Din relaţiile (I.4) şi (I.5) rezultă afirmaţia lemei.

Reciproca lemei precedente are loc în condiţii mai restrictive şi anume :

Lema I.2. Dacă $(X, \mathfrak{H})$ este separat şi complet iar $\mathfrak{H}$ are bază numărabilă, atunci orice şir de aplicaţii multivoce definite pe R cu valori în X, uniform Cauchy este uniform convergent pe R.

Demonstraţia rezultă din teorema 20.41 din [8] şi propoziţia 4.1 din [7].

Lema I.3. Fie $F : R \to (X, \mathfrak{H})$ o aplicaţie multivocă aproape periodică.

(i) Dacă ξ este H aproape-perioadă pentru F, atunci şi $-\xi$ este H-aproape perioadă pentru F.

(ii) Dacă ξ_1 este H_1-aproape-perioadă pentru F şi ξ_2 este H_2 aproape-perioadă pentru F, atunci $\xi_1 \pm \xi_2$ este $H_1 \circ H_2$-aproape-perioadă pentru F.

Demonstraţie. (i) Deoarece ξ este H-aproape-perioadă pentru F, avem :

$$F(x+\xi) \subset H(F(x)),\ \forall y \in F(x),\ H(y) \cap F(x+\xi) \neq \varnothing,\ \forall x \in R$$

Înlocuind x cu $x - \xi$ se obţine condiţia cerută.

(ii) Deoarece ξ_1 este H_1-aproape-perioada pentru F, avem :

$$F(x+\xi_1) \subset H_1(F(x)),\ \forall y \in F(x),\ H_1(y) \cap F(x+\xi_1) \neq \varnothing,\ \forall x \in R \tag{I.6}$$

De asemenea, ţinînd seama că ξ_2 este H_2-aproape-perioadă pentru F, obţinem :

$$F(x+\xi_2) \subset H_2(F(x)),\ \forall y \in F(x), \tag{I.7}$$
$$H_2(y) \cap F(x+\xi_2) \neq \varnothing,\ \forall x \in R$$

Din (I.6), înlocuind x cu $x+\xi_2$, se obţine :

$$F(x+\xi_1+\xi_2) \subset H_1(F(x+\xi_2)),\quad \forall y \in F(x+\xi_2), \tag{I.8}$$
$$H_1(y) \cap F(x+\xi_1+\xi_2) \neq \varnothing,\quad \forall x \in R$$

Fie $u \in F(x+\xi_1+\xi_2)$. Din (I.8) rezultă că există $v \in F(x+\xi_2)$ cu proprietatea $(v, u) \in H_1$, iar din (I.7) rezultă că există $w \in F(x)$ astfel încît $(w, v) \in H_2$. Deci $(w, u) \in H_1 \circ H_2$, adică $u \in (H_1 \circ H_2)(w)$

Deci, am arătat că :

$$F(x+\xi_1+\xi_2) \subset (H_1 \circ H_2)(F(x)),\ \forall x \in R \tag{I.9}$$

Fie acum $y \in F(x)$. Din (I.7), rezultă că există $u \in F(x+\xi_2)$, astfel ca $(y, u) \in H_2$, iar din (I.8) rezultă că există $v \in F(x+\xi_1+\xi_2)$ cu proprietatea $(u, v) \in H_1$.

Deci $(y, v) \in H_1 \circ H_2$, adică $v \in (H_1 \circ H_2)(y)$. Prin urmare :

$$\forall y \in F(x),\ (H_1 \circ H_2)(y) \cap F(x+\xi_1+\xi_2) \neq \varnothing,\ \forall x \in R \tag{I.10}$$

Din (I.9) și (I.10) rezultă că $\xi_1+\xi_2$ este $H_1 \circ H_2$ aproape-perioadă pentru F.

Combinînd rezultatul obținut, cu cel din (i) rezultă că și $\xi_1-\xi_2$ este $H_1 \circ H_2$-aproape-perioadă pentru F.

Lema I.4. Fie $F : R \to (X, \mathfrak{H})$ o aplicație multivocă aproape periodică. Dacă ξ este H-aproape-perioadă pentru F și $K \supset H$, atunci ξ este K-aproape-perioadă pentru F.

Demonstrația este o consecință imediată a definiției aproape-periodicității.

II. Legătura între aplicațiile multivoce aproape-periodice și cele normale

Teorema II.1. Dacă aplicația multivocă $F : R \to (X, \mathfrak{H})$ este normală, atunci ea este aproape periodică.

Demonstrație. Presupunem că F nu este aproape-periodică. Atunci există $H_0 \in \mathfrak{H}$, astfel încît pentru orice $l>0$, există un interval de lungime l, care nu conține nici o H_0-aproape-perioadă a lui F.

Fie $h_1 \in R$ și $(a_1, b_1) \subset R$, un interval de lungime mai mare ca $2 \mid h_1 \mid$ care nu conține nici o H_0-aproape-perioadă a lui F. Dacă $h_2 = \frac{1}{2}(a_1+b_1)$, atunci $h_2-h_1 \in (a_1, b_1)$ și deci h_2-h_1, nu poate fi H_0-aproape-perioadă a lui F. Fie acum $(a_2, b_2) \subset R$, de lungime mai mare decît $2(\mid h_1 \mid + \mid h_2 \mid)$ care nu conține nici o H_0-aproape-perioadă a lui F. Punînd $h_3 = \frac{1}{2}(a_2+b_2)$ rezultă că $(h_3-h_1), h_3-h_2 \in (a_2, b_2)$ și deci nu sînt H_0-aproape-perioade pentru F.

Procedînd analog, definim numerele $h_4, h_5, \ldots$, astfel încît nici una din diferențele h_i-h_j, $i \neq j$, nu este H_0-aproape-perioadă pentru F. Deci

$$\exists\, y \in F(x) : H_0(y) \cap F(x+h_i-h_j) = \varnothing \tag{II.1}$$

sau

$$\exists\, z \in F(x+h_i-h_j) : H_0(z) \cap F(x) = \varnothing \tag{II.2}$$

pentru un $x \in R$.

Din (II.1) și (II.2) rezultă :

$$\exists\, u \in R : \exists\, y \in F(u+h_j) \tag{II.3}$$

astfel încît

$$H_0(y) \cap F(u+h_i) = \varnothing \quad \forall\, i \neq j,\ i, j \in N$$

$$\exists\, v \in R : \exists\, y \in F(v+h_i) \tag{II.4}$$

astfel încît

$$H_0(y) \cap F(v+h_j) = \varnothing \quad \forall\, i \neq j,\ i, j \in N.$$

Din (II.3) și (II.4) rezultă că șirul $(F(x+h_n))_{n \in N}$ nu conține nici un subșir uniform Cauchy.

Dar aceasta, conform lemei I.1, contrazice ipoteza că F este normală.

Teorem II.2. Dacă $(X, \mathfrak{H})$ este spațiu uniform separat, complet și cu bază numărabilă, iar $F : R \to (X, \mathfrak{H})$ este o aplicație multivocă aproape-periodică, atunci ea este normală.

Demonstrație. Fie $H \in \mathfrak{H}$ și $(h_n)_{n \in N}$ un șir de numere reale. Fie $(H_n)_{n \in N}$ o bază a lui $\mathfrak{H}$ formată din anturaje simetrice cu proprietatea $H_n \circ H_n \subset H_{n-1}$, $n \geqslant 1$. Există atunci $n_0 \in N$ astfel ca $H_{n_0} \circ H_{n_0} \subset H$. Pentru fiecare $n \in N$ considerăm $h_n = \xi_n + r_n$, unde ξ_n este H_{n_0+1}-aproape-perioadă pentru F, iar

$0 \leqslant r_n \leqslant l(H_{n_0}+1)$, $l(H)$ fiind numărul pozitiv ce corespunde fiecărui $H \in \mathfrak{H}$ din definiția aproape-periodicității. Considerăm de asemenea pentru fiecare h_n o singură reprezentare de forma de mai sus. Fie acum $r \in R$ un punct de acumulare al mulțimii $(r_n)_{n \in N}$ și $\delta > 0$ astfel ca $|x - x'| < 2\delta$ implică

$$F(x) \subset H_{n_0}(F(x')), \quad \forall\, y \in F(x'),$$
$$H_{n_0}(y) \cap F(x) \neq \emptyset$$

Un astfel de δ există deoarece F este aproape periodică, deci uniform continuă pe R ([2]).

Considerăm subșirul $(h_{1n})_{n \in N}$ al lui $(h_n)_{n \in N}$ format din acei h_n pentru care $r_n \in (r-\delta, r+\delta)$. Atunci avem:

$$F(x+h_{1n}) \subset H(F(x+h_{1m})), \quad \forall\, y \in F(x+h_{1m}), \tag{II.5}$$
$$H(y) \cap F(x+h_{1n}) \neq \emptyset, \quad \forall\, x \in R, \ \forall\, m, n \in N$$

Într-adevăr, deoarece ξ_{1n} și ξ_{1m} sînt H_{n_0+1}-aproape-perioade pentru F din lemele I.3 și I.4 rezultă că $\xi_{1n} - \xi_{1m}$ este H_{n_0}-aproape-perioadă pentru F, deci avem:

$$F(x+\xi_{1n}-\xi_{1m}+r_{1n}-r_{1m}) \subset H_{n_0+1}(F(x+r_{1n}-r_{1m})),$$
$$\forall\, y \in F(x+r_{1n}-r_{1m}), \tag{II.6}$$
$$H_{n_0+1}(y) \subset F(x+\xi_{1n}-\xi_{1m}+r_{1n}-r_{1m}) \neq \emptyset, \quad \forall\, x \in R, \ m, n \in N.$$

De asemenea

$$F(x+r_{1n}-r_{1m}) \subset H_{n_0}(F(x)), \quad \forall\, y \in F(x), \tag{II.7}$$
$$H_{n_0}(y) \cap F(x+r_{1n}-r_{1m}) \neq \emptyset, \quad \forall\, x \in R, \ \forall\, m, n \in N$$

deoarece $|r_{1n} - r_{1m}| < 2\delta$ și F este uniform continuă pe R.

Din (II.6) rezultă că pentru fiecare $z \in F(x+h_{1n}-h_{1m})$, există $v \in F(x+r_{1m}-r_{1m})$ astfel ca $(v, z) \in H_{n_0+1} \subset H_{n_0}$, iar din (II.7) rezultă că există $w \in F(x)$ astfel ca $(v, w) \in H_{n_0}$. Deci $(w, z) \in H_{n_0} \circ H_{n_0} \subset H$, adică $z \in H(w)$. Atunci

$$F(x+h_{1n}-h_{1m}) \subset H(F(x)), \quad \forall\, x \in R, \ \forall\, m, n \in N \tag{II.8}$$

Analog din (II.7) rezultă că pentru fiecare $u \in F(x)$ există $v \in F(x+r_{1n}-r_{1m})$ astfel ca $(u, v) \in H_{n_0}$, iar din (II.6) rezultă că există $w \in F(x+h_{1n}-h_{1m})$ astfel ca $(v, w) \in H_{n_0+1} \subset H_{n_0}$. Deci $(u, w) \in H_{n_0} \circ H_{n_0} \subset H$, adică $w \in H(u)$. Prin urmare

$$\forall\, u \in F(x), \ H(u) \cap F(x+h_{1n}-h_{1m}) \neq \emptyset \tag{II.9}$$
$$\forall\, x \in R, \ \forall n, m \in N$$

Relațiile (II.8) și (II.9) ne conduc la (II.5).

Înlocuind H cu H_{n_0} și H_{n_0} cu H_{n_0+1} și procedînd analog ca la formarea șirului $(h_{1n})_{n \in N}$, se extrage din acesta subșirul $(h_{2n})_{n \in N}$ pentru care are loc

$$F(x+h_{2n}) \subset H_{n_0}(F(x+h_{2m})), \tag{II.10}$$
$$\forall\, y \in F(x+h_{2m}), \ H_{n_0}(y) \cap F(x+h_{2n}) \neq \emptyset, \ \forall\, x \in R, \ \forall\, n, m \in N$$

Continuînd procedeul, se obține pentru fiecare $i \in N$ subșirul $(h_{in})_{n \in N}$ cu proprietățile:

$$F(x+h_{in}) \subset H_{n_0+i-2}(F(x+h_{im})), \tag{II.11}$$
$$\forall\, y \in F(x+h_{im}), \ H_{n_0+i-2}(y) \cap F(x+h_{in}) \neq \emptyset, \ \forall\, x \in R, \ \forall\, n, m \in N$$

Din subșirurile construite mai sus se formează șirul diagonal $(h_{nn})_{n\in N}$, din care se obține șirul de mulțimi $(F(x+h_{nn}))_{n\in N}$. Vom arăta în continuare că acesta este un șir de mulțimi uniform Cauchy. Fie un anturaj arbitrar $K\in\mathfrak{H}$. Există atunci un număr natural p astfel încît anturajul H_p din baza lui $\mathfrak{H}$ verifică proprietățile $H_p\subset K\cap H_{n_i+1}$, $H_p\circ H_p\subset K$. Șirul $(F(x+h_{pn}))_{n\in N}$ verifică (II.11) cu $i=p$. Vom arăta că pentru orice r, $s\geqslant p$, avem :

$$F(x+h_{rr})\subset K(F(x+h_{ss})),\quad \forall y\in F(x+h_{ss}),\qquad (II.12)$$

$$K(y)\cap F(x+h_{rr})\neq\emptyset,\quad \forall x\in R$$

Într-adevăr, din (II.11) și lema I.4 se obține :

$$F(x+h_{pr})\subset H_p(F(x+h_{ps}),\quad \forall y\in F(x+h_{ps}),$$

$$H_p(y)\cap F(x+h_{pr})\neq\emptyset,\ \forall x\in R,$$

și întrucît r, $s\geqslant p$, avem :

$$F(x+h_{rr})\subset H_p(F(x+h_{ps}),\ \forall x\in F(x+h_{ps}),$$

$$H_p(y)\cap F(x+h_{rr})\neq\emptyset,\ \forall y\in R \qquad (II.13)$$

și

$$F(x+h_{ss})\subset H_p(F(x+h_{ps}),\ \forall y\in F(x+h_{ps}), \qquad (II.14)$$

$$H_p(y)\cap F(x+h_{ss})\neq\emptyset,\ \forall x\in R$$

Printr-un procedeu care a mai fost folosit în demonstrația acestei teoreme, din (II.13) și (II.14) se obține (II.12). Deci șirul $(F(x+h_{nn}))_{n\in N}$ este un șir uniform Cauchy. Folosind lema I.2 rezultă că el este uniform convergent pe R și deci F este normală.

BIBLIOGRAFIE

[1] T. Bânzaru, Continuitatea și continuitatea uniformă a aplicațiilor multivoce dintre spații uniforme. Buletinul Șt. Tehnic Inst. Politehnic Timișoara, Seria Mat.-Fizică-Mecanică, 18 (32), fascicola 2 (1973), 129—133.

[2] T. Bânzaru, Aplicații multivoce aproape-periodice, Buletinul Șt. Tehnic Inst. Politehnic Timișoara, Seria Mat.-Fizică-Mecanică, 19 (33), fascicola 1 (1974), 25—28.

[3] C. Berge, Espaces topologiques. Fonctions multivoques Dunod, Paris, 1959.

[4] S. Bochner, Abstrakte fastperiodische Funktionen. Acta Mathematica. 61 (1933), 149—184.

[5] C. Corduneanu, Funcții aproape-periodice. Editura Academiei R.P.R., 1961.

[6] N. Gheorghiu, Funcții aproape-periodice de variabilă continuă și de variabilă întreagă. Analele St. Univ. Iași, (s.n.) 2 (1956), 29—31.

[7] E. Michael, Topologies on spaces of subsets, Trans. Amer. Math. Soc. 71 (1951), 152—182.

[8] W. J. Thron, Topological structures. Holt Rinehart 1966.

ON ALMOST-PERIODICITY FOR MULTIFUNCTIONS WITH VALUES IN UNIFORM SPACES

ABSTRACT

Let F be a multifunction from $\mathbf{R}$ to the uniform space $(X, \mathfrak{H})$.

In this note the normality for F is defined and, using normality, characterizations for almost-periodicity are given.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara
MATEMATICĂ—FIZICĂ
Tom. 26 (40) **Fascicola 2**

ON A FAMILY OF CONTRACTIVE MAPS

BY

B.G. PACHPATTE

1. Introduction

Let (X, d) be a metric space and let T be a mapping of X into itself. A mapping T is called a contraction if there exists a positive real number $q<1$ such that

$$d(Tx, Ty)<qd(x, y),$$

holds for all $x, y \in X$. If X is a complete space, then, by Banach contraction mapping principle (see, [1]), T has a unique fixed point in X.

Since the appearance of Banach's contraction mapping principle in 1922, a great deal of attention has been given in the literature to this result (see, [1]−[15]). Recently, Ćirić [2], Iseki [5], Maia [9] and others have given sufficient conditions for the existence of a common fixed point for a sequence of self mappings of a complete metric space. The results presented here generalize some of the results of these authors.

2. Main Results

In this section we state and prove our main results on the common fixed points of self mappings of a complete metric space. The following result is the principal result of this section.

Theorem 1. *Let (X, d) be a complete metric space and $\{T_n : n \in I^+\}$ (I^+ the positive integers) be a sequence of self mappings of X such that for all $x, y \in X$ and every pair i, j with $i \neq j$,*

$$d(T_i(x), T_j(y)) \leq q \max \{d(x, y), d(x, T_i(x)), d(y, T_j(y)),$$

$$d(x, T_j(y)), \frac{1}{2} d(y, T_i(x))\}, \tag{1}$$

where $q \in (0, 1)$. Then the sequence of mappings $\{T_n\}$ has a unique common fixed point in X.

Proof. Let $x_0 \in X$ be arbitrary and define a sequence

$$x_0=x, x_1=T_i(x_0), x_2=T_j(x_1), \ldots, x_{2n-1}=T_i(x_{2n-2}), x_{2n}=T_j(x_{2n-1}), \ldots \tag{2}$$

By (1) we have

$$d(x_{2n}, x_{2n+1})=d(T_j(x_{2n-1}), T_i(x_{2n}))=d(T_i(x_{2n}), T_j(x_{2n-1}))$$

$$\leq q \max \{d(x_{2n}, x_{2n-1}), d(x_{2n}, T_i(x_{2n})), d(x_{2n-1}, T_j(x_{2n-1})),$$

$$d(x_{2n}, T_j(x_{2n-1})), \frac{1}{2} d(x_{2n-1}, T_i(x_{2n}))\}$$

$$=q \max \{d(x_{2n-1}, x_{2n}), d(x_{2n}, x_{2n+1}), 0, \frac{1}{2} d(x_{2n-1}, x_{2n+1})\}.$$

Since $d(x_{2n}, x_{2n+1}) \leqslant 0$ and $d(x_{2n}, x_{2n+1}) \leqslant q\, d(x_{2n}, x_{2n+1})$ for $(q<1)$ are impossibile, we have

$$d(x_{2n}, x_{2n+1}) \leqslant q \max \{d(x_{2n-1}, x_{2n}), \frac{1}{2} d(x_{2n-1}, x_{2n+1})\}.$$

If

$$\max \{d(x_{2n-1}, x_{2n}), \frac{1}{2} d(x_{2n-1}, x_{2n+1})\} \tag{3}$$

is $d(x_{2n-1}, x_{2n})$, then

$$d(x_{2n}, x_{2n+1}) \leqslant q\, d(x_{2n-1}, x_{2n}). \tag{4}$$

If max of the numbers in (3) is $\frac{1}{2} d(x_{2n-1}, x_{2n+1})_2$, then

$$d(x_{2n}, x_{2n+1}) \leqslant \frac{1}{2} q\, [d(x_{2n-1}, x_{2n}) + d(x_{2n}, x_{2n+1})]$$

which implies

$$d(x_{2n}, x_{2n+1}) \leqslant \frac{q}{2-q} d(x_{2n-1}, x_{2n}) \leqslant q\, d(x_{2n-1}, x_{2n}). \tag{5}$$

From (4) and (5) we have

$$d(x_{2n}, x_{2n+1}) \leqslant q\, d(x_{2n-1}, x_{2n}). \tag{6}$$

Proceeding in this manner one has

$$d(x_{2n-1}, x_{2n}) \leqslant q\, d(x_{2n-2}, x_{2n-1}) \leqslant \ldots \leqslant q^{2n-1} d(x_0, x_1). \tag{7}$$

By routine calculation one can show that the following inequalities hold

$$d(x_n, x_m) \leqslant \sum_{k=n}^{m-1} d(x_k, x_{k+1}) \leqslant \frac{q^n}{1-q} d(x_0, x_1), \quad m>n.$$

Therefore (2) is a Cauchy sequence. Then completeness of X implies that for some $u \in X$

$$u = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

We shall now prove that u is a fixed point of T_i and T_j. Using (1) and the triangle inequality we have

$$d(u, T_i(u)) \leqslant d(u, x_{2n}) + d(T_j(x_{2n-1}), T_i(u))$$

$$\leqslant d(u, x_{2n}) + q \max \{d(u, x_{2n-1}), d(u, T_i(u)), d(x_{2n-1}, x_{2n}),$$

$$d(u, x_{2n}), \frac{1}{2} d(x_{2n-1}, T_i(u))\}.$$

From the above inequality we observe that $d(u, T_i(u))$ tends to zero as n tends to infinity, and hence we obtain $T_i(u) = u$. Similarly $T_j(u) = u$, so we have proved u is a common fixed point of T_i and T_j.

Now we shall show that u is a unique common fixed point of T_i and T_j. Let v be a common fixed point of T_i and T_j, then by (1) we have

$$d(u, v) = d(T_i(u), T_j(v))$$

$$\leqslant q \max \{d(u, v)\, d(u, T_i(u)), d(v, T_j(v)),$$

$$d(u, T_j(v)), \frac{1}{2} d(v, T_i(u))\}$$

$$= q \max \{d(u, v), 0, 0, d(u, v), \frac{1}{2} d(u, v)\},$$

which implies $u=v$. Therefore T_i and T_j have a unique common fixed point in X.

Next we shall show that all these fixed points coincide. Let u, v, be common fixed points of T_i, T_j and T_k, T_l respectively. To prove $u=v$, we may suppose $i\neq k$ and $T_j(u)=u$, $T_l(v)=v$. By (1) we have

$$d(u, v)=d(T_j(u),\ T_l(v))$$

$$\leqslant q\ max\{d(u, v),\ 0,\ 0,\ d(u, v),\ \frac{1}{2}(d, v)\},$$

which implies $u=v$, This shows that the fixed points of every pair T_i, T_j coincide. Hence u is a unique common fixed point of the sequence of mappings $\{T_n\}$ and the proof of the theorem is complete.

We next establish a slightly different version of Theorem 1 which in turn is a further generalization of Theorem 1 given by K. Iseki in [5].

Theorem 2. *Let (X, d) be a complete metric space and $\{T_n : n\in I^+\}$ be a sequence of self mappings of X. Suppose that there is a sequence of nonnegative integers $\{m_n\}$ such that for all x, $y\in X$ and every pair i, j with $i\neq j$,*

$$d(T_i^{mi}(x),\ T_j^{mj}(y))\leqslant q\ max\ \{d(x, y),\ d(x, T_i^{mi}(x)),\ d(y, T_j^{mj}(y)),$$

$$d(x, T_j^{mj}(y)),\ \frac{1}{2}d(y,\ T_i^{mi}(x))\},\tag{8}$$

where $q\in(0, 1)$. Then the sequence of mappings $\{T_n\}$ has a unique common fixed point in X.

Proof. Define $U_i=T_i^{mi}$ $(i=1, 2, \ldots)$, then for $i\neq j$ we have

$$d(U_i(x),\ U_j(y))\leqslant q\ max\ \{d(x, y),\ d(x, U_i(x)),\ d(y, U_j(y)),\tag{9}$$

$$d(x, U_j(y)),\ \frac{1}{2}d(y,\ U_i(x))\}.$$

By Theorem 1, the sequence of mappings $\{U_i\}$ has a unique common fixed point in X. Then

$$u=U_i(u)=T_i^{mi}(u).$$

Therefore we have

$$T_i(u)=T_i(T_i^{mi}(u))=T_i^{mi}(T_i(u))=U_i(T_i(u)).$$

This means that $T_i(u)$ is a fixed point of U_i. By the inequality (9) we have

$$d(T_i(u),\ T_j(u))=d(U_i(T_i(u)),\ U_j(T_j(u)))\leqslant$$

$$\leqslant q\ max\ \{d(T_i(u),\ T_j(u)),\ d(T_i(u),\ T_i(u)),\ d(T_j(u),\ T_j(u)),$$

$$d(T_i(u),\ T_j(u)),\ \frac{1}{2}d(T_j(u), T_i(u))\},$$

which implies $T_i(u)=T_j(u)$. Hence $T_i(u)$ is a common fixed pint of the sequence of mappings $\{U_i\}$. Since $\{U_i\}$ has a unique common fixed point u, we have $T_i(u)=u$ $(i=1, 2, \ldots)$. Therefore u is a common fixed point of the sequence of mappings $\{T_n\}$. The uniqueness is trivial. This completes the proof of the theorem.

It may be noted that the contractive condition considered in (8) is the most general for metric spaces (see, [12]) and contains as a special case the contractive condition used by Iseki [5] which in itself contains as a special case the contractive conditions used by several authors in the recent literature.

We next establish the following common fixed point theorem which generalizes the recent results given by Istratescu [7] and Iseki [5].

Theorem 3. *Let* (X, d) *be a complete metric space and* T_i $(i=1, 2, \ldots, k)$ *be a finite family of mappings of* X *into itself such that*

(i) $T_iT_j=T_jT_i$ $(i, j=1, 2, \ldots, k)$,

(ii) *there are two systems of positive integers* $\{m_1, m_2, \ldots, m_k\}$ *and* $\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$ *such that for all* $x, y \in X$

$$d(T_1^{m_1} \ldots T_k^{m_k}(x), T_1^{n_1} \ldots T_k^{n_k}(y)) \leqslant q \max \{d(x, y), d(x, T_1^{m_1} \ldots T_k^{m_k}(x)),$$

$$d(y, T_1^{n_1}, \ldots T_k^{n_k}(y)), d(x, T_1^{n_1} \ldots T_k^{n_k}(y)), \frac{1}{2} d(y, T_1^{m_1} \ldots T_k^{m_k}(x))\} \quad (10)$$

where $q \in (0, 1)$. *Then* T_i $(i=1, 2, \ldots, k)$ *have a unique common fixed point.*

Proof. Let $U=T_1^{m_1}, \ldots T_k^{m_k}$, $V=T_1^{n_1} \ldots T_k^{n_k}$ then by (10) we have

$$d(U), V(y)) \leqslant q \max \{d(x, y), d(x, U(x)), d(y), V(y)), d(x, V(y)), \frac{1}{2} d(y, U) x))\}.$$

By a suitable application of Theorem 1, U and V have a unique common fixed point u, i.e. $U(u)=V(u)=u$. Then for each i,

$$T_i(U(u))=T_i(V(u))=T_i(u).$$

By the condition (i), we have

$$U(T_i(u))=V(T_i(u))=T_i(u).$$

Therefore $T_i(u)$ $(i=1, 2, \ldots, k)$ are common fixed points of U and V. By the uniqueness of the common fixed points of U, V, we have

$$T_i(u)=u \quad (i=1, 2, \ldots, k).$$

The uniqueness mentioned in the statement of the theorem is trivial. This proves the theorem.

The following theorem is a generalization of M.G. Maia's theorem give in [9].

Teorem 4. *Let* X *be a metric space with two matrices* d *and* δ. *If* X *satisfies*

(i) $d(x, y) \leqslant \delta(x, y)$ *for all* x, y *in* X,

(ii) X *is complete with respect to* d,

(iii) *two mappings* $U, V : X \to X$ *are continuous with respect to* d, *and*

$$\delta(U(x), V(y)) \leqslant q \max \{\delta(x, y), \delta(x, U(x)), \delta(y, V(y)),$$

$$\delta(x, V(y)), \frac{1}{2} \delta(y, U(x))\}, \quad (11)$$

for all x, y *in* X *and* $q \in (0, 1)$, *then* U *and* V *have a unique common fixed point in* X.

Proof. Let $x_0 \in X$ be arbitrary and define a sequence

$$x_1=U(x_0), x_2=V(x_1), \ldots, x_{2n}=V(x_{2n-1}), x_{2n+1}=U(x_{2n}), \ldots$$

By (11) we have

$$\delta(x_{2n}, x_{2n+1})=\delta(V(x_{2n-1}), U(x_{2n}))=\delta(U(x_{2n}), V(x_{2n-1}))$$
$$\leqslant q \max \{\delta(x_{2n-1}, x_{2n}), \delta(x_{2n}, x_{2n+1}), \delta(x_{2n-1}, x_{2n}),$$
$$\delta(x_{2n}, x_{2n}), \frac{1}{2} \delta(x_{2n-1}, x_{2n+1})\},$$

which by following the similar argument as in the proof of Theorem 1 implies

$$\delta(x_{2n}, x_{2n+1}) \leqslant q\,\delta(x_{2n-1}, x_{2n}).$$

Then

$$\delta(x_n, x_m) \leqslant \frac{q^n}{1-q}\,\delta(x_0, x_1), \quad m>n.$$

Therefore, by $d \leqslant \delta$, we have

$$d(x_n, x_m) \leqslant \frac{q^n}{1-q}\,\delta(x_0, x_1).$$

This shows that the sequence $\{x_n\}$ is a Cauchy sequence with respect to d. Since X is complete with respect to d, $\{x_n\}$ has a limit point u in X, i.e.

$$u = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Hence, by the continuity of U with respect to the metric d,

$$u = \lim_{n\to 8} x_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} U(x_{2n}) = U(\lim_{n\to\infty} x_{2n}) = U(u).$$

Similary we have $u = V(u)$. Therefore u is a common fixed point of U and V. The uniqueness follows by the similar argument as in the proof of Theorem 1, which completes the proof.

In Theorem 4, let $U(x) = V(x)$, and the max of the numbers on the right side in (11) is $\delta(x, y)$, then we have a theorem by M.G. Maia [9].

As an application of Theorem 4 we establish the following more general results which is a further generalization of the fixed pint theorem given by Iseki in [5].

Teorem 5. *Let X be a metric space with two metrices d and δ, and T_i $(i = 1, 2, \ldots k)$ a finite family of continuous mappings of X into itself. Suppose that*

(i) $d(x, y) \leqslant \delta(x, y)$ *for all* $x, y \in X$,

(ii) X *is complete with respect to* d,

(ii) $T_i T_j = T_j T_i$ $(i, j = 1, 2, \ldots, k)$,

(iv) *there are two systems of positive integers*

$\{m_1, m_2, \ldots, m_k\}$ *and* $\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$ *such that for* x, y *in* X,

$$\delta(T_1^{m_1} \ldots T_k^{m_k}(x), T_1^{n_1} \ldots T_k^{n_k}(y)) \leqslant q \max\{\delta(x, y), \delta(x, T_1^{m_1} \ldots T_k^{m_k}(x)),$$

$$\delta(y, T_1^{n_1} \ldots T_k^{n_k}(y)), \delta(x, T_1^{n_1} \ldots T_k^{n_k}(y)), \frac{1}{2}\delta(y, T_1^{m_1} \ldots T_k^{m_k}(x))\} \qquad (12)$$

where $q \in (0, 1)$. *Then* T_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ *have a unique common fixed point in* X.

The proof of this theorem follows by the similar argument as in the proof of Theorem 3 by using Theorem 4. We omit the details.

3. Nonunique Fixed Point Theorems

Recently, Ćirić [3] and Iseki [6] have obtained some nonunique fixed point theorems for self mappings of X satisfying the condition

$$\min\{d(Tx, Ty), d(x, Tx), d(y, Ty)\} - \min\{d(x, Ty), d(y, Tx)\} \leqslant$$

$$\leqslant q\,d(x, y). \qquad (13)$$

In this section we establish some common fixed point theorems for self mappings of X satisfying the condition of the type (13). We recall that (see, [3]) a mapping T on X is orbitally continuous if $\lim_i T^{n_i}x=u$ implies $\lim_i TT^{n_i}x=Tu$ for each $x\in X$. A space X is T-orbitally complete if every Cauchy sequence of the form $\{T^{n_i}x\}_{i=1}^{\infty}$, $x\in X$, converges in X.

We now state and prove the following nonunique fixed point theorem for a family of self mappings of X.

Teorem 6. *Let $\{T_n : n\in I^+\}$ be a sequence of orbitally continuous self mappings of X and let X be T_n-orbitally complete and for all x, $y\in X$ and for every pair i, j with $i\neq j$.*

$$\min\{d(T_i(x), T_j(y)), d(x, T_i(x)), d(y, T_j(y))\} \tag{14}$$
$$-\min\{d(x, T_j(y)), d(y, T_i(x))\} \leqslant q\, d(x, y),$$

where $q\in(0, 1)$. Then the sequence of mappings $\{T_n\}$ have a common fixed point in X.

Proof. Let $x_0\in X$ be arbitrary and define a sequence

$$x_0=x,\ x_1=T_i(x_0),\ x_2=T_j(x_1),\ \ldots,\ x_{2n-1}=T_i(x_{2n-2}),\ x_{2n}=T_j(x_{2n-1}),\ \ldots$$

Then by (14) for $x=x_0$, $y=x_1$, we have

$$\min\{d(x_1, x_2), d(x_0, x_1), d(x_1, x_2)\}-\min\{d(x_0, x_2), 0\}=$$
$$=\min\{d(x_1, x_2), d(x_0, x_1)\}\leqslant q\, d(x_0, x_1).$$

Since $d(x_0, x_1)\leqslant q\, d(x_0, x_1)$ is impossible (as $q<1$), one has

$$d(x_1, x_2)\leqslant q\, d(x_0, x_1).$$

Similarly by (14) for $x=x_2$, $y=x_1$, we have

$$\min\{d(x_2, x_3), d(x_2, x_3), d(x_1, x_2)\}-\min\{0, d(x_1, x_3)\}$$
$$\leqslant q\, d(x_1, x_2),$$

which implies

$$d(x_2, x_3)\leqslant q\, d(x_1, x_2).$$

Repeating the above argument, we obtain for each $n=1, 2, \ldots$

$$d(x_n, x_{n+1})\leqslant q\, d(x_{n-1}, x_n).$$

By the routine calculation it follows that $\{x_n\}$ is a Cauchy sequence. X being T_i-orbitally complete, there is some $u\in X$ such that $u=\lim_n T_i^n(x)$. By orbital continuity of T_i

$$T_i(u)=\lim_n T_iT_i^n(x)=u,$$

i.e. u is a fixed point of T_i. Similarly $T_ju=u$. Therefore T_i, T_j have a common fixed point in X. As in the proof of Theorem 1, it follows that all these fixed points coincide. Hence u is a common fixed point of the sequence of mappings $\{T_n\}$ and the proof of the theorem is complete.

We now apply Theorem 6 to establish the following more general nonunique fixed point theorem.

Theorem 7. *Let T_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ be orbitally continuous self mappings of X and let X be T_k-orbitally complete such that $T_1 \ldots T_n$ commutes with every T_k, and for every x, y of X,*

$$\min \{d(T_1 \ldots T_n(x),\ T_n \ldots T_1(y)),\ d(x, T_1 \ldots T_n(x)),\ d(y, T_n \ldots T_1(y))\} -$$

$$-\min \{d(x, T_n \ldots T_1(y)),\ d(y, T_1 \ldots T_n(x))\} \leqslant q\, d(x, y), \tag{15}$$

where $q \in (0, 1)$. Then T_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ have a common fixed point in X.

Proof. Let $U=T_1 \ldots T_n$, $V=T_n \ldots T_1$, then by (15), we have

$$\min \{d(U(x),\ V(y)),\ d(x, U(x)),\ d(y, V(y))\}$$

$$-\min \{d(x, V(y)),\ d(y, U(x))\} \leqslant q\, d(x, y),$$

for all x, y in X. By a suitable application of Theorem 6, U and V have a common fixed point u. Then $U(u)=V(u)=u$.

For any T_i, $T_i(U(u))=T_i(u)$. By the assumption $U(T_i(u))=T_i(u)$. Similarly $V(T_i(u))=T_i(u)$. Hence $T_i(u)=u$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, which means that u is a common fixed point of $\{T_k\}$. This completes the proof.

To this end we establish the following theorems indicated by Maia's theorem given in [9].

Theorem 8. *Let X be a metric space with two metrices d and δ. If X satisfies the following conditions:*

(i) *$d(x, y) \leqslant \delta(x, y)$ for every x, y in X,*

(ii) *two mappings U, $V : X \to X$ are orbitally continuous with respect to metric d,*

(iii) *X is U and V orbitally complete with respect to d, and for x, $y \in X$,*

$$\min \{\delta(U(x),\ V(y)),\ \delta(x, U(x)),\ \delta(y, V(y))\} - \tag{16}$$

$$-\min \{\delta(x, V(y)),\ \delta(y, U(x))\} \leqslant q\, \delta(x, y),$$

where $q \in (0, 1)$, then U and V have a common fixed point in X.

Theorem 9. *Let X be a metric space with two metrices d and δ. If X satisfies the following conditions,*

(i) *$d(x, y) \leqslant \delta(x, y)$ for every x, y in X,*

(ii) *T_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ a finite family of orbitally continuous mappings of X into itself such that $T_1 \ldots T_n$ commutes with every T_k,*

(iii) *X is T_k-orbitally complete with respect to d, and for every x, y of X*

$$\min \{\delta(T_1 \ldots T_n(x),\ T_n \ldots T_1(y)),\ \delta(x, T_1 \ldots T_n(x)),\ \delta(y, T_n \ldots T_1(y))\} -$$

$$-\min \{\delta(x, T_n \ldots T_1(y)),\ \delta(y, T_1 \ldots T_n(x))\} \leqslant q\, \delta(x, y). \tag{17}$$

where $q \in (0, 1)$, then T_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ have a common fixed point in X.

The proofs of Theorems 8 and 9 follows by the similar arguments as in the proofs of Theorems 6 and 7 in view of the proofs of Theorems 4 and 5 given in section 2 and we leave the details to the reader.

REFERENCES

[1] S. Banach, Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur applications aux equations integrales, *Fund. Math.* 3 (1922), 133–181.

[2] L. B. Ćiric, On a family of contractive maps and fixed points, *Publ. Inst. Math.* 17 (1974), 45–51.

[3] L. B. Ćirić, On some maps with a nonunique fixed point, *Publ. Inst. Math.* 17 (1974) 52—58
[4] L. B. Ciric, A generalization of Banach's contraction principle, *Proc. Amer. Math. Soc.* 45 (1974), 267—273.
[5] K. Iseki, Fixed point theorems in complete metric spaces, *Math. Seminar Notes, Kobeo Univ.* 2 (1974), 1—6.
[6] K. Iseki, An approach to fixed point theorems, *Math. Seminar Notes, Kobeo Univ.* 3 (1975), 1—11.
[7] V. I. Istrătescu, Introducere în teoria punctelor fixe, Bucarest, 1973.
[8] R. Kannan, Some results on fixed points, *Bull. Calcutta Math. Soc.* 60 (1968), 71—76.
[9] M. G. Maia, Un'osservazione Sulle contrazioni metriche, *Rend. Sem. Mat. Padova;* 40 (1968), 139—143.
[10] B. G. Pachpatte, On some common fixed point theorems in metric spaces, *Matematicki Vesnik* 14 (1977), 9—13.
[11] B. G. Pachpatte, Generalized contraction mappings and common fixed point theorems, *Proc. Nat. Acad. Sci., India* 46 (A) (1976), 76—80.
[12] B. E. Rhoades, A comparison of various definitions of contractive mappings, *Trans. Amer. Math. Soc.* 226 (1977), 257—290.
[13] I. A. Rus, On common fixed points, *Studia Univ. Babeş-Bolyai Fasc.* 1 (1973), 31—33.
[14] V. M. Sehgal, Some fixed and common fixed point theorems in metric spaces, *Cand. Math. Bull.* 17 (1974), 251—259.
[15] C. S. Wong, Common fixed points of two mappings, *Pacific J. Math.* 48 (1973), 299—312

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara

MATEMATICĂ—FIZICĂ

Tom. 26 (40) Fascicola 2

DEPENDENŢA DE GROSIME A STRUCTURII DE DOMENII LA PATURILE GROASE DE 90% Co 10% Ni

DE

COLETTA DE SABATA, CRISTIAN MARCU

(primită la redacţie la data de 26.VII.1980).

În lucrări anterioare am studiat comportarea păturilor groase de aliaj CoNi din punct de vedere al dependenţei proprietăţilor magnetice de grosimea păturii [1, 2, 3]. Variaţia proprietăţilor acestui aliaj bogat în cobalt a fost exprimată prin curbele $B=f(H)$ şi $\mu=f(H)$ a căror aspect este redat în fig. 1 şi 2.

Lucrarea de faţă urmăreşte evidenţierea dependenţei de grosime a structurii de domenii magnetice prin utilizarea tehnicii Bitter.

Aliajul electrolitic de 90% Co 10% Ni s-a realizat sub formă de pături cu grosimea între 6 μm şi 450 μm şi fiecare probă a fost depusă separat, în condiţii care să nu modifice concentraţia cationilor din baie.

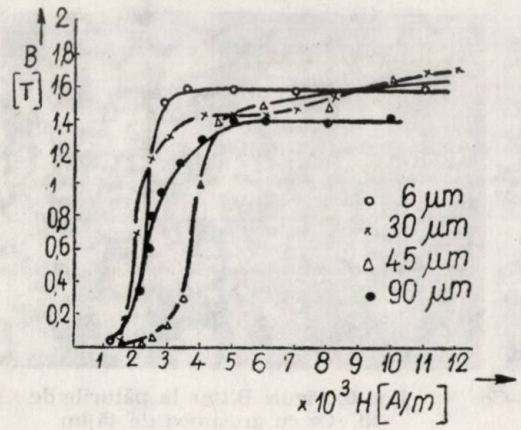


Fig. Dependenţa B=f(H) la pături groase de aliaj Ni—Co (90% Co—10% Ni).

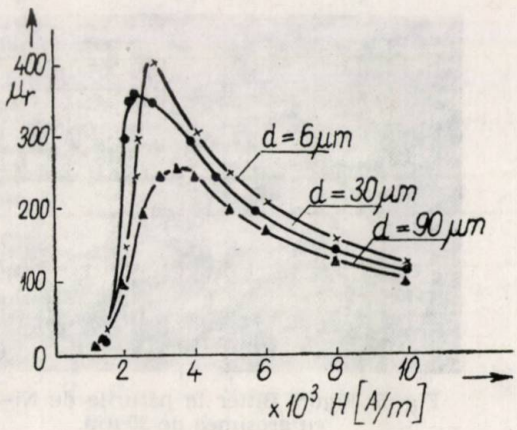


Fig. 2. Dependenţa u=f(H) la pături groase de aliaj Ni—Co (90% Co—10% Ni).

În figura 3 este prezentată structura caracteristică păturilor cu grosimea de 6 μm ; aspectul figurilor Bitter arată structura cristalină hexagonală a materialului, domeniile sînt mici, magnetizate antiparalel şi normal pe suprafaţa probei.

Similitudinea de structură cu materialul feromagnetic hexagonal MnBi [4, 5, 6] indică o valoare ridicată a anizotropiei cristalului şi în acest caz.

Este de remarcat de asemenea existenţa pereţilor în formă de sîrmă ghimpată care se manifestă atunci cînd se produce trecerea de la pereţi Néel la

pereți Bloch, la limita dintre domenii. Existența pereților „sîrmă ghimpată" la grosimea de 6 μm este o particularitate a acestui material deoarece în cazul permalloyului acest tip de structură a fost evidențiat experimental pentru pelicule mai subțiri, între $(4 \sim 8)\ 10^{-2}$ μm.

Fig. 3. Figuri Bitter la păturile de Ni—Co cu grosimea de 6 μm.

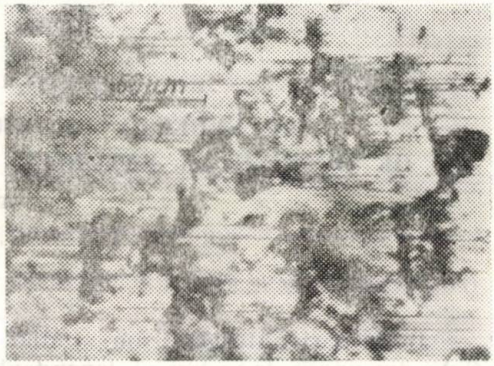


Fig. 4. Figuri Bitter la păturile de Ni—Co cu grosimea de 15 μm

Pe măsură ce grosimea peliculei crește — 15 μm, 30 μm și 45 μm — structura de domenii devine și rămîne tipică structurii cristaline hexagonale, foarte ordonată ca gen de structură. Modificarea stării magnetice trebuie să se facă în mod preponderent prin procese de rotație coerente și care necesită o energie importantă din partea cîmpului H exterior (fig. 4, 5, 6).

Fig. 5. Figuri Bitter la păturile de Ni—Co cu grosimea de 30 μm.

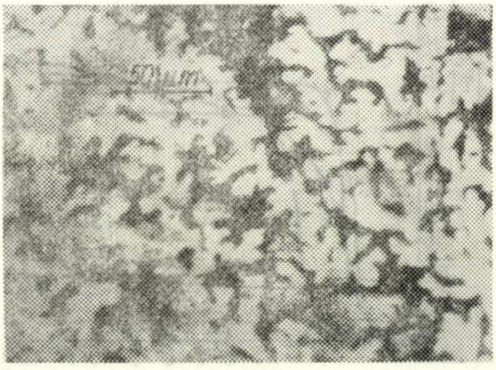


Fig. 6. Figuri Bitter la păturile de Ni—Co cu grosimea de 45 μm.

La trecerea spre grosimi mari — 90 μm — (fig. 7) structura de domenii se modifică trecînd spre o formă în labirint dar cu aspect de „lespezi" succesive, datorită în bună măsură tensiunilor mecanice importante la aceste pături groase.

În fine, în cazul materialului masiv — 225 μm — dar obținut tot prin depunere electrolitică, se pot vedea domenii de tip „pumnal" care evidențiază odată mai mult faptul că magnetizația este perpendiculară pe probă (fig. 8).

Dacă se compară dependența permeabilității magnetice relative $\mu_r = f(H)$ pentru aceste pături cu grosimi crescătoare (fig. 2) se observă scăderea valorii maxime, dovadă directă a faptului că deplasările de pereți fac loc rotațiilor

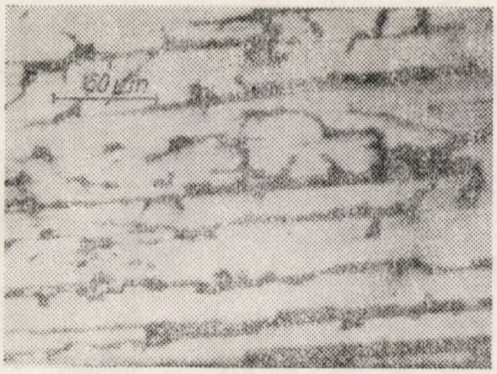


Fig. 7. Figuri Bitter la păturile de Ni—Co cu grosimea de 90 µm.

Fig. 8. Figuri Bitter la păturile de Ni—Co cu grosimea de 225 µm.

vectorilor de magnetizare spontană în cadrul procesului de modificare a stării magnetice [7].

În concluzie putem considera că peliculele groase de 10% Ni 90% Co au o structură magnetică ce evidenţiază structura cristalină hexagonală, prezintă o anizotropie puternică în plan perpendicular pe peliculă şi modificarea stării magnetice se face în principal prin procese de rotaţii, permeabilitatea magnetică scăzînd cu grosimea păturii şi avînd maximul deplasat spre cotul superior al curbei fundamentale de magnetizare.

BIBLIOGRAFIE

[1] C. De Sabata, C. Marcu, Stud. cercet. Fiz., Ed. Acad. R.S.R., T. 24, nr. 8, p. 945—949, 1972.
[2] C. de Sabata, C. Marcu, Intern. Wiss. Koll. T.H. Ilmenau, 1977.
[3] C. de Sabata, C. Marcu, A. Kun, A. Huschitt, M. Gorgan, G. Heim, Bul. Şt. Tehn. IPT, Mat. Fiz. Mec. T 24 (38), fasc. 1, p. 50—54, Timişoara, 1978.
[4] Roberts B. W., Beau C.P., Phys. Rev. *99*, 1494, 1954.
[5] Williams H. J., Sherwood R. C., Foster F. G. and Kelley E. M., J. Appl. Phys., *28*, 1181, 1957.
[6] Williams H. F., and Sherwood R. C., J. Appl. Phys., *29*, 286, 1958.
[7] Bozort R. M., „Recent Avances in Science" New York University Press, 1956.

LA STRUCTURE MAGNÉTIQUE DES COUCHES ÉLÉCTROLYTIQUES DE 90% CO 10% Ni COMME FONCTION DE L'ÉPAISSEUR

RÉSUMÉ

On a étudié la structure magnétique — par la technique de Bitter — d'un alliage électrolytique 90% Co 10% Ni.

L'alliage présente une structure héxagonale, avec une forte anysotropie normale à la couche.

L'aspect de labyrint reçois une forme stratifié pour $d \geqslant 90$ µm comme suite à la présence des tenssions méchaniques dans le matériel.

La modification de l'état magnétique a lieu principalement par le processus de rotation, fait évidencié aussi dans la dépendence $\mu_{r,max} = f(d)$.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara

MATEMATICĂ—FIZICĂ

Tom. 26 (40) **Fascicola 2**

UTILIZAREA ENERGIEI SOLARE PENTRU ÎNCĂLZIREA BITUMULUI ÎN REZERVOARE CILINDRICE DE MARE CAPACITATE

DE

C. DE SABATA, D. MIHAILOVICI, R. BAEA, I. LUMINOSU, M. GANGAL

(primită la data de 26.VII.1980).

Introducere

În lucrarea de faţă s-a efectuat un studiu teoretic şi experimental referitor la preîncălzirea bitumului în rezervoare cilindrice de mare capacitate, utilizîndu-se efectul simplu de seră în captarea energiei solare.

Construirea unui insolator cilindric.

În cadrul Catedrei de fizică de la Institutul politehnic „Traian Vuia" din Timişoara s-a efectuat un studiu teoretic şi experimental privind preîncălzirea şi menţinerea temperaturii, în timpul zilei, a bitumului în rezervoare cilindrice, de mare capacitate, utilizîndu-se efectul simplu de seră.

Pentru aceasta în „Laboratorul pentru studiul captării energiei solare" s-a construit un model similar de rezervor metalic (tablă de 0,3 mm grosime), de formă cilindrică, avînd lungimea de 30 cm şi diametrul de 15 cm (fig. 1). Masa bitumului din rezervor este de 6,4 kg iar masa proprie a rezervorului metalic de 1,17 kg.

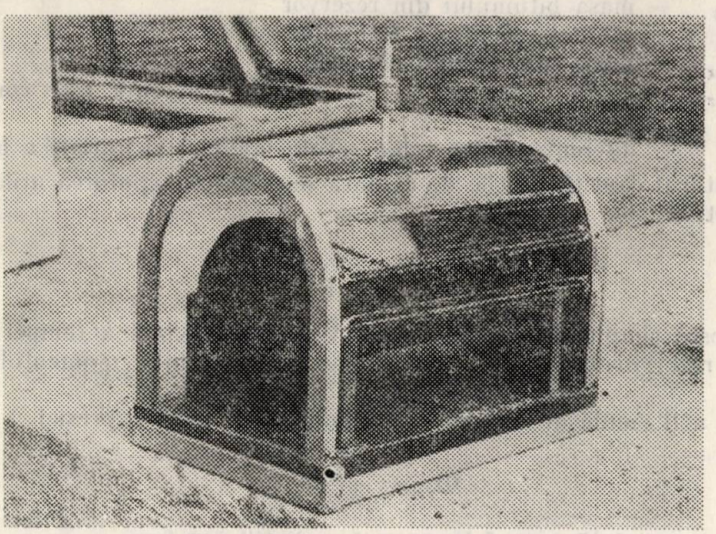


Fig. 1. Heliocaptatorul cilindric.

Suprafața activă este dată de secțiunea principală a cilindrului, adică

$$S_{activ}=l\cdot d=45\cdot 10^{-3}\ m^2,$$

iar suprafața de pierderi este egală cu suprafața totală a cilindrului, avînd valoarea

$$S_{pierderi}=\pi\cdot d\cdot l+2\pi r^2=1\ 589\cdot 10^{-4}\ m^2.$$

Partea superioară a suprafeței laterale și una din bazele cilindrului au fost vopsite în negru, iar partea inferioară respectiv a doua bază a cilindrului au culoare deschisă și au fost izolate cu plăci de textolit.

Efectul simplu de seră a fost creat cu ajutorul unei acoperitoare semicilindrice de sticlă, montată pe un suport metalic. Modelul este echipat cu un dispozitiv, care permite varierea unghiului dintre orizontală și axa cilindrului, precum și măsurarea acestui unghi.

În cercetările efectuate cu captatorul cilindric s-au urmărit caracteristicile de funcționare ale acestuia, în condiții statice, și influența parametrilor meteo asupra eficienței de captare a energiei solare de către instalație.

Din literatura de specialitate se desprinde faptul că, pierderile prin reflexie și absorbție în suprafața cilindrică transparentă, utilizată în locul celei plane, sînt mai mici, datorită faptului că în cazul captatorului cilindric suprafața de reflexie este mai mică. De asemenea, căldura se transmite direct materialul conținut în rezervor, iar pierderile termice care au loc prin conducție, radiație și prin convecție prin spatele insolatorului plan sînt parțial eliminate [1].

Considerații teoretice

Studiul teoretic referitor la problema abordată în această lucrare s-a axat pe determinarea mărimilor caracteristice, care intervin în stabilirea performanței unui heliocaptator, și în special la captatorul cilindric utilizat.

Una dintre aceste mărimi este cantitatea de căldură utilă a zilei, care se determină pe baza relației

$$Q_u=(m_{bi}\cdot C_{bi}+m_{rez}\cdot C_{rez})\cdot\Delta t, \tag{1}$$

unde: m_{bi} — masa bitumului din rezervor
C_{bi} — căldura specifică a bitumului
m_{rez} — masa rezervorului cilindric
C_{rez} — căldura specifică a materialului din care este confecționat rezervorul
Δt — diferența dintre temperatura maximă și inițială a bitumului.

Cu ajutorul cantității utile de căldură se determină puterea utilă medie a zilei respective

$$P_{u.m}=\frac{Q_u}{\tau}, \tag{2}$$

în care τ este timpul în care se atinge valoarea maximă a temperaturii din interiorul rezervorului, luînd ca origine a timpului, momentul pornirii instalației.

Fluxul util mediu al unei zile se calculează pe baza expresiei

$$\Phi_{u.m}=\frac{P_{u.m}}{S_{activ}}, \tag{3}$$

unde S_{activ} reprezintă suprafața expusă radiațiilor solare.

Randamentul mediu corespunzător fluxului determinat prin relația (3) este dat de

$$\eta = \frac{\Phi_{u.m}}{\Phi}, \tag{4}$$

în care Φ este intensitatea fluxului de radiație solară [2].

Pentru a putea determina temperatura maximă, pe care o poate atinge captatorul în condiții de izolare date, este necesar de a cunoaște conductanța acestuia. Mărimea respectivă se deduce din porțiunea de răcire a curbelor de dependență de timp a temperaturilor și se calculează pe baza relației

$$C = \frac{(m_{bi} \cdot C_{bi} + m_{rez} \cdot C_{rez})\,\Delta t_1}{S_{pierderi} \cdot \tau' \cdot \Delta t_2}, \tag{5}$$

unde : Δt_1 – variația de temperatură a bitumului în intervalul de timp $\tau' = 1$ h ;

Δt_2 – diferența de temperatură dintre cea a bitumului și cea a mediului ambiant.

Echilibrul energetic se realizează în momentul în care puterea pierdută ($C.S_{pierderi} \cdot \Delta t_{max}$) devine egală cu puterea absorbită ($\eta_{termic} = 0$).

Puterea absorbită poate fi aproximată, cu puterea utilă dintr-un interval de timp scurt, care succede momentului pornirii instalației, deoarece diferența de temperatură între cea a bitumului și cea a mediului ambiant este mică. Prin urmare, pe acest interval de timp, pierderile energetice date de relația

$$C.S_{pierderi} \cdot \Delta t$$

sînt neglijabile.

Deci, se poate scrie

$$P_u = C.S_{pierderi} \cdot \Delta t_{max}$$

Menționăm că aceste considerații sînt valabile în cazul în care intensitatea fluxului de radiație solară este constantă.

Randamentul termic orar respectiv cel global orar se poate calcula pe baza temperaturii maxime Δt_{max}, produsă de instalația de captare și a variației de temperatură Δt dintre interiorul mediului cercetat și mediul ambiant, adică

$$\eta_{termic} = 1 - \frac{\Delta t}{\Delta t_{max}} \tag{7}$$

și

$$\eta_{global} = \eta_{optic} \cdot \eta_{termic} \tag{8}$$

Corelînd datele obținute din măsurătorile experimentale cu relațiile prezentate se pot determina, cu o precizie suficient de bună, mărimile caracteristice, care conduc la stabilirea performanțelor captatorului studiat.

Tehnica măsurătorilor

Măsurătorile experimentale au fost efectuate în zilele cu cer senin, noros și respectiv acoperit, utilizîndu-se efectul simplu de seră, în două variante de pozare a captatorului cilindric.

În prima variantă, axa instalației a fost orientată pe direcția nord-sud, iar unghiul α de înclinare a axei cilindrului față de orizontală a fost de 26°,

asigurîndu-se prin aceasta normalitatea dintre direcţia razelor solare şi secţiunea principală a cilindrului pe întreaga durată a măsurătorilor. Această normalitate este asigurată prin geometria instalaţiei, deoarece se poate considera că, secţiunea principală se roteşte cu o viteză unghiulară egală cu cea aparentă a soarelui pe cer. Astfel, s-a putut considera că, pe durata măsurătorilor, intensitatea fluxului solar are valoarea medie 800 W/m^2, în acord cu valorile insolaţiei în această perioadă a anului calendaristic.

În varianta a doua, axa cilindrului a fost orientată pe direcţia est-vest şi unghiul α a avut valoarea de zero grade.

În ambele variante s-a măsurat temperatura în centrul cilindrului şi temperatura mediului ambiant în acord cu normele O.M.M.

Rezultate experimentale

Dependenţa temperaturii bitumului din rezervorul model în funcţie de timp, precum şi cea a mediului ambiant sînt redate în figurile 2, 3, 4 şi 5.

În figura 2, în condiţii de cer senin, cu nori trecători, temperatura în rezervor a atins valoarea maximă de 52 °C la ora 15, realizîndu-se o diferenţă de 22–23 °C faţă de temperatura ambiantă.

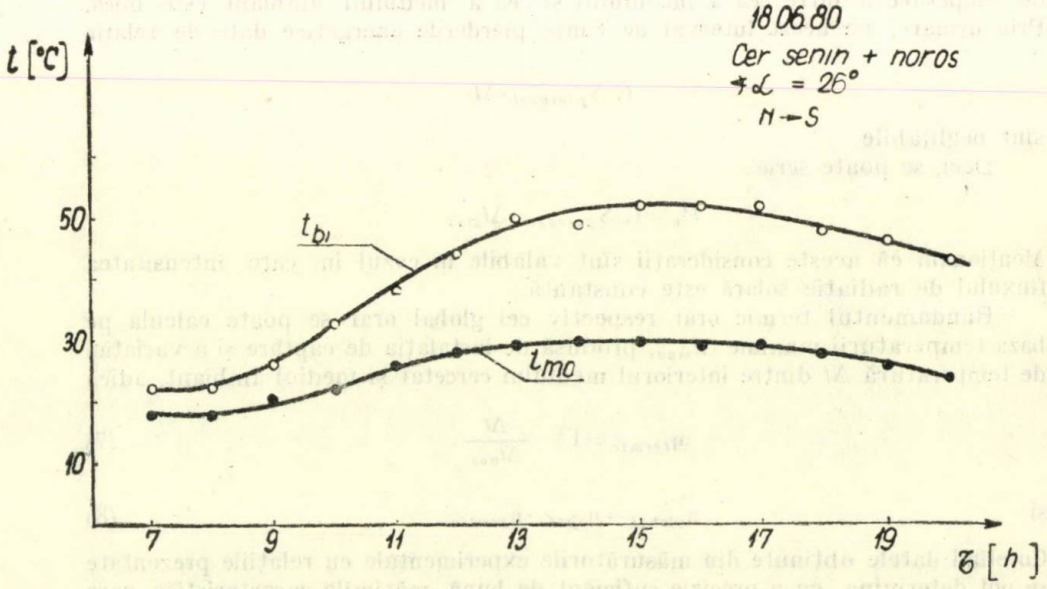


Fig. 2. Variaţia în timp a temperaturii bitumului şi a temperaturii mediului ambiant, în cazul orientării pe direcţia nord-sud a captatorului (zi senină).

Măsurătorile din figurile 3 şi 4 s-au efectuat în zile cu cer noros respectiv acoperit. Se constată că, în condiţii de cer noros, se pot obţine variaţii de temperatură faţă de cea a mediului de 16 °C iar în cazul unui cer acoperit, variaţia de temperatură este de 8 °C.

Rezultatele reprezentate în figurile 2, 3 şi 4 s-au obţinut în condiţiile primei variante de pozare a rezervorului.

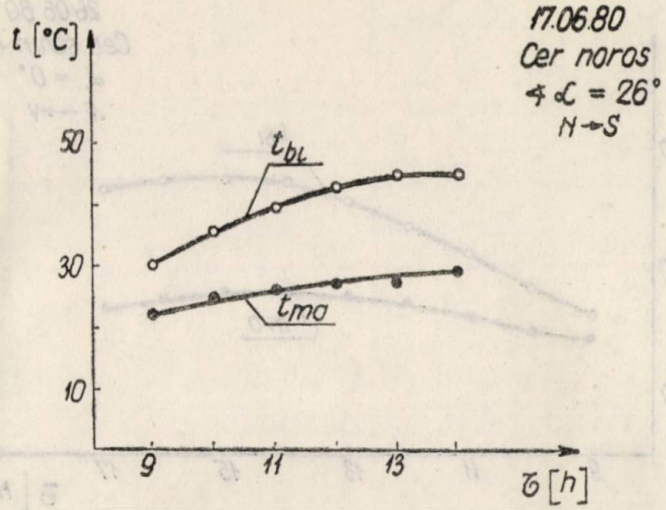


Fig. 3. Variația în timp a temperaturii bitumului și a temperaturii mediului ambiant, în cazul orientării pe direcția nord-sud a captatorului (zi noroasă).

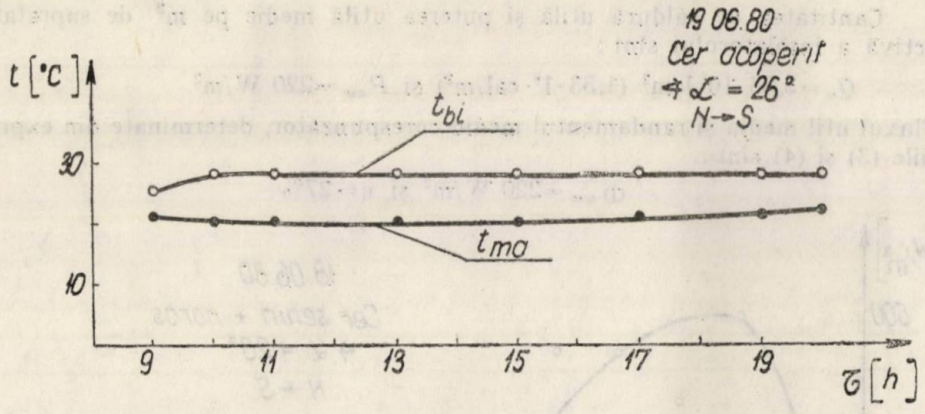


Fig. 4. Variația în timp a temperaturii bitumului și a temperaturii mediului ambiant în cazul orientării pe direcția nord-sud a captatorului (zi acoperită).

Figura 5 redă măsurători efectuate în varianta a doua de pozare a captatorului și în condițiile de cer senin combinat cu cer noros. Din analiza curbelor se constată că se pot obține variații de temperatură de 19 °C între temperatura bitumului din interiorul rezervorului și cea a mediului ambiant.

Deoarece curbele temperaturilor arată că funcționarea modelului a fost optimă în condițiile primei variante, cu cer senin, s-au calculat mărimile caracteristice ale captatorului pentru ziua respectivă.

Astfel, cantitatea de căldură utilă a zilei respectiv puterea medie, calculate cu ajutorul relațiilor (1) și (2) au valorile

$$Q_u = 2{,}5 \cdot 10^5 \text{J } (0{,}6 \cdot 10^5 \text{cal}) \text{ și } P_{um} = 9{,}9 \text{ W}$$

corespunzătoare suprafeței insolatoruuli studiat.

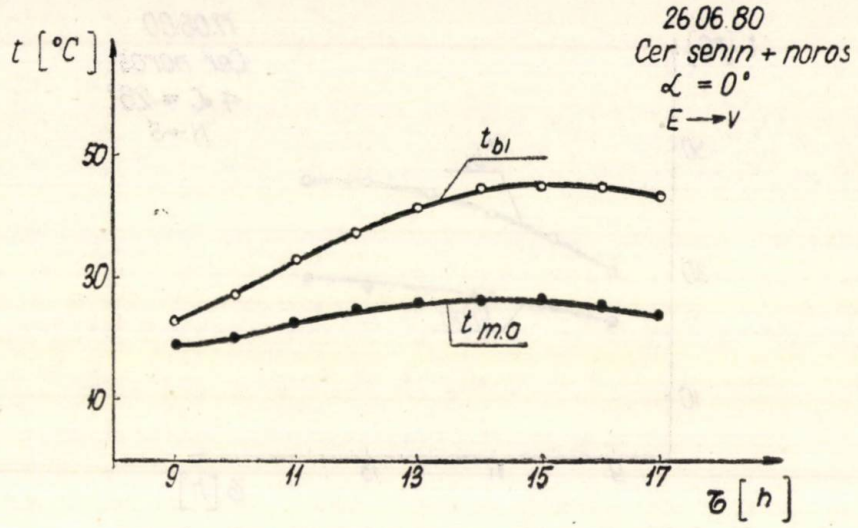


Fig. 5. Variația în timp a temperaturii bitumului și cea a mediului ambiant, cu orientarea est-vest a instalației.

Cantitatea de căldură utilă și puterea utilă medie pe m^2 de suprafață activă a insolatorului sînt :

$$Q_u = 5{,}56 \cdot 10^6 \text{J/m}^2 \ (1{,}33 \cdot 1^6 \text{ cal/m}^2) \text{ și } P_{um} = 220 \text{ W/m}^2$$

Fluxul util mediu și randamentul mediu corespunzător, determinate din expresiile (3) și (4) sînt :

$$\Phi_{um} = 220 \text{ W/m}^2 \text{ și } \eta = 27\%$$

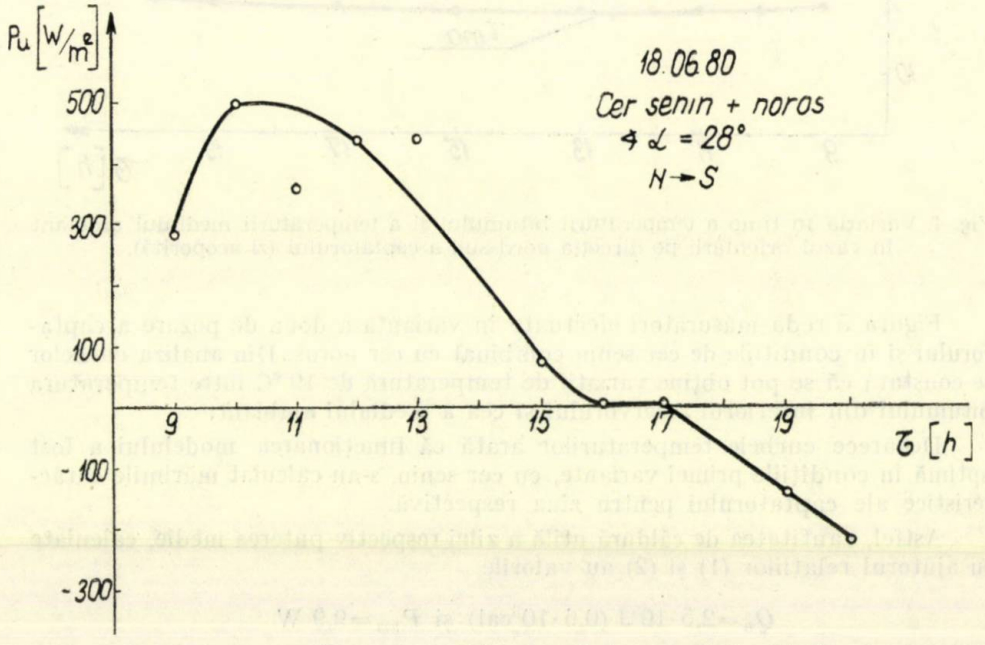


Fig. 6. Dependența orară a puterii utile pe m^2 de suprafață activă a insolatorului cilindric.

Conductanța captatorului cilindric, calculată din (5) este :

$$C = 3 \text{ W/m}^2 \cdot \text{grd.}$$

Valoarea maximă a variației de temperatură pe care o poate atinge heliocaptatorul studiat, determinată pe baza relației (6) este $\Delta t_{max} = 26{,}6°C$.

În figura 6 se arată dependența orară a puterii utile pe m^2 de suprafață activă a insolatorului cilindric. Se observă că, puterea este maximă în jurul orei 11 și se menține la valori pozitive pînă la ora 16, apoi devine zero pînă la ora 17, după care captatorul devine radiator față de mediu, ceea ce impune cuplarea unei instalații auxiliare pentru compensarea puterii pierdute.

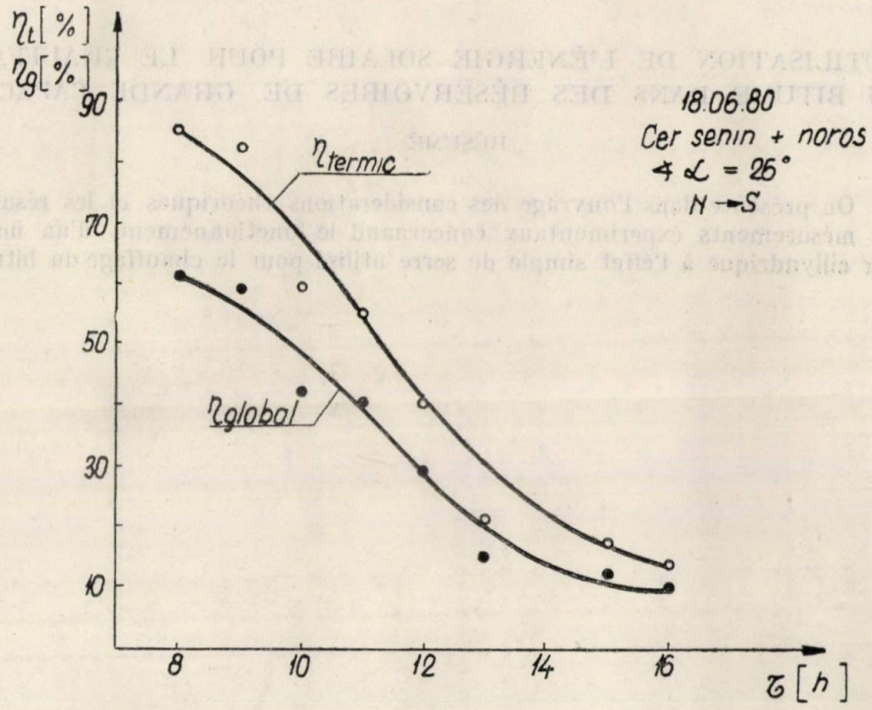


Fig. 7. Variația în timp a randamentului termic și a celui global.

Figura 7 redă variația în timp a randamentului termic și a celui global. Se observă că, la ora 16, randamentul global tinde spre valoarea zero.

Concluzii

Din cercetările experimentale efectuate se desprind următoarele constatări :

– Eficiența maximă a instalației cu efect simplu de seră se realizează în zilele senine, cu orientarea acesteia pe direcția nord-sud și cu o înclinare a axei rezervorului de aproximativ 30° față de orizontală.

– Instalațiile deja existente pot fi amenajate, cu cheltuieli reduse, pentru captarea energiei solare, întrucît se obțin variații de temperatură de 20 °C și în cazul orientării pe direcția est-vest.

– Pe durata verii, cînd temperatura ambiantă depășește 30 °C, temperatura bitumului din rezervor poate atinge temperatura de 65 °C.

– În timpul nopţii este necesară o instalaţie auxiliară, pentru a compensa pierderile energetice ale instalaţiei.

– Captatorul devine mai eficient prin îmbunătăţirea proprietăţilor termoizolante ale părţilor laterale şi posterioare.

BIBLIOGRAFIE

[1] Al. Dănescu, S. Bucurenciu, Şt. Petrescu, Utilizarea energiei solare, Ed. tehn. Bucureşti, 1980.
[2] D. Pailharey, C.O.M.P.L.E.S., Bulletin nr. 16, 1969.

L'UTILISATION DE L'ÉNERGIE SOLAIRE POUR LE CHAUFFAGE DU BITUME DANS DES RÉSERVOIRES DE GRANDE CAPACITÉ

RÉSUMÉ

On présente dans l'ouvrage des considerations théoriques et les résultats des mésurements éxperimentaux concernand le fonctionnement d'un insolateur cillyndrique à l'éffet simple de serre utilisé pour le chauffage du bitume.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara

MATEMATICĂ—FIZICĂ

Tom. 26 (40) **Fascicola 2**

ON A NEW MECHANICS FOR MICROSCOPIC SYSTEMS

BY

M. BORNEAS, I. MIRON, I. DAMIAN

(Primită la redacţie la data de 11.XI.1980.

I. A renewed interest has appeared in a mechanics for microscopic systems, differing from quantum mechanics. In the most recent proposal Yussouff [1] advances as basis for the new mechanics the equation

$$\vec{F}=\dot{\vec{p}}-\vec{f} \tag{1}$$

where $\vec{F}$ is the external force, p is the momentum $m\dot{x}$, and f is a damping force due to a selfinteraction ; for motions in one direction this force has the expression [1]

$$f=\left(1-\frac{p^2}{m^2c^2}\right)^{1/2}\left(\frac{m^2\hbar^2}{8p}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{5\,(\dot{p})^2}{p^4}-\frac{2\ddot{p}}{p^3}\right) \tag{2}$$

(m is the mass, and $\hbar$ is the rationalized Planck's constant). Yussouff shows that the mechanics based on eqs. (1) and (2) is related to the Schrödinger equation, but it is a deterministic mechanics.

Looking at the force (2), one can see that the mechanics proposed by Yussouff is a specific form of the *generalized mechanics with higher derivatives* (GM), the formalism of which has been exhaustively developed by several authors [2] [3] [4] [5] [6] [7] [8] [9].

We shall apply now the formalism of GM to the theory of Yussouff.

II. First we write down the expression of the force (2) for the nonrelativistic case, discussed in ref. [1], and in view of $p=m\dot{x}$, we have

$$f=\frac{m^2\hbar^2}{8p}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{5\,(\dot{p})^2}{p^4}-\frac{2\ddot{p}}{p^3}\right)$$

$$=-(\hbar^2/4\,m)\,(\dddot{x}\,\dot{x}^{-4}-8\ddot{x}\,\ddot{x}\,\dot{x}^{-5}+10\ddot{x}^3\dot{x}^{-6}) \tag{3}$$

where $\dot{x}=\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$. The equation of motion now reads

$$m\ddot{x}=F-(\hbar^2/4m)\,(\dddot{x}\,\dot{x}^{-4}-8\ddot{x}\,\dot{x}\,\dot{x}^{-5}+10\ddot{x}^3\,\dot{x}^{-6}). \tag{4}$$

The Lagrangian which leads to the equation (4) is

$$L=T-(\hbar^2/8\,m)\,\ddot{x}^2\,\dot{x}^{-4}-V \tag{5}$$

with $T=m\dot{x}^2/2$ and $F=-\partial V/\partial x$.

According to *GM* the equations of motions are [2]

$$\frac{\partial L}{\partial q_k}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,p_{k/1}=0 \tag{6}$$

where q_k are the generalized coordinates, and $p_{k/1}$ is the generalized momentum

$$p_{k/n}=\sum_{j=0}^{s-n} p_{k(nj)} \quad (n=1,\ 2) \tag{7}$$

$$p_{k\,(nj)}=(-1)^j \frac{d^j}{dt^j} \frac{\partial L}{\partial q_k^{(j+n)}} \tag{8}$$

of the first order, i.e.

$$p_{k/1}=\sum_{j=0}^{s-1} p_{k\,(1j)} \tag{9}$$

$$p_{k\,(1j)}=(-1)^j \frac{d^j}{dt^j} \frac{\partial L}{\partial q_k^{(j+1)}}\,. \tag{10}$$

In the present case $s=1$, and k has one value, thus

$$p_{\,(10)}=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=m\dot{x}+(\hbar^2/2m)\,\ddot{x}^2\,\dot{x}^{-5} \tag{11}$$

$$p_{\,(11)}=-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}}=-\frac{d}{dt}\left(-\frac{\hbar^2}{4m}\,\ddot{x}\,\dot{x}^{-4}\right)$$

$$=(\hbar^2/4m)\,(\dddot{x}\dot{x}^{-4}-4\ddot{x}^2\dot{x}^{-5}) \tag{12}$$

and

$$p_1=\sum_{j=0}^{1} p_{(1j)}=p_{(10)}+p_{(11)}=m\dot{x}+(\hbar^2/4m)\,(\dddot{x}\dot{x}^{-4}-2\ddot{x}^2\dot{x}^{-5}). \tag{13}$$

Thus (6), in view of (13), yields the equation (4). The momentum for $n=2$ reads

$$p_2=p_{(20)}=\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}}=-(\hbar^2/4m)\,\ddot{x}\dot{x}^{-4}. \tag{14}$$

The Hamiltonian is [2]

$$H=\sum_{n=1}^{s} p_{k/n}q_k^{(n)}-L \tag{15}$$

or in the present case

$$H=(m/2)\,\dot{x}^2+(\hbar^2/4m)\,[\dddot{x}\dot{x}^{-3}-(5/2)\,\ddot{x}^2\dot{x}^{-4}]+V. \tag{16}$$

III. Let us now examine the equation of motion when the damping force is very large, such that $f\gg\dot{p}$ (in Yussouff's view in this case the wave behaviour dominates).

We then have

$$F-(\hbar^2/4m)\,(\ddddot{x}\dot{x}^{-4}-8\dddot{x}\ddot{x}\dot{x}^{-5}+10\ddot{x}^3\dot{x}^{-6})=0. \tag{17}$$

For the free „particle" the equation reads

$$\ddddot{x}\dot{x}^{-4}-8\dddot{x}\ddot{x}\dot{x}^{-5}+10\ddot{x}^3\dot{x}^{-6}=0. \tag{18}$$

This equation has been studied previously [10]. A solution is

$$x=c_1t+c_2 \tag{19}$$

which is the uniform motion. But there are also other solutions, more complicated, due to the nonclassical character of the „particle". This nonclassical character is also emphysized by the fact that, as it has been shown [3] [7], the „particle" is able to pass beyond a potential barrier, even if its energy is less that the height of the barrier.

For a „harmonic oscillator" the equation of motion is

$$\dddot{x}\dot{x}^{-4} - 8\ddot{x}\dot{x}\dot{x}^{-5} + 10\ddot{x}^3\dot{x}^{-6} = (4m^2\omega^2/\hbar^2)\, x. \tag{20}$$

One can find a solution of the form [10]

$$x = M\,(t) \exp i\,[\gamma\,(t) + \delta] \tag{21}$$

which is a very complicated oscillation.

The energy levels can be found with the help of the Hamiltonian [1].

IV. Yussouff shows that the Schrödinger wave function can be interpreted in the new mechanics [1]. But he does not derive the Schrödinger equation. Now, it turns out that (16) is identical with the Hamiltonian obtained in a previous paper [11], with the term $T = m\dot{x}^2/2$ denoted there by $\varnothing$; from this Hamiltonian the Schrödinger equation for the complex wave function of the form

$$\psi = a\ exp\ i\theta \tag{22}$$

has been deduced. This has been achieved with the help of

$$\psi^*\psi = a^2 = w\,(x) \simeq \dot{x}^{-1} \tag{23}$$

and of the well known relation [12]

$$\vec{v} = (\hbar/m)\ \nabla\ \theta, \tag{24}$$

where $\vec{v}$ is a mean velocity in quantum mechanics, corresponding to $\dot{x}$ from the classical term $m\dot{x}^2/2$.

Let us now, utilizing the method of rel. [11], derive the Schrödinger equation in the case when the vector potential is also involved. We start from the Lagrangian

$$L = \Theta - (\hbar^2/8m)\,\ddot{l}^2\dot{l}^{-4} - V \tag{25}$$

where l is the length of the path on the trajectory. The meaning of Θ will be discussed later on.

The momenta given by (10) and (9) are in this case

$$p_{k(10)} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \Theta}{\partial \dot{x}_k} - \frac{\hbar^2}{4m}\,\ddot{l}\,\dot{l}^{-4}\,\frac{\partial \ddot{l}}{\partial \dot{x}_k} + \frac{\hbar^2}{2m}\,\ddot{l}^2\dot{l}^{-5}\,\frac{\partial \dot{l}}{\partial \dot{x}_k} \tag{26}$$

$$p_{k(11)} = -\frac{d}{dt}\,\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} = \frac{\hbar^2}{4m}\,\dddot{l}\,\dot{l}^{-4}\,\frac{\partial \ddot{l}}{\partial \ddot{x}_k} - \frac{\hbar^2}{m}\,\ddot{l}^2\,\dot{l}^{-5}\,\frac{\partial \ddot{l}}{\partial \ddot{x}_k} +$$

$$+\ddot{l}\ \dot{l}^{-4}\,\frac{d}{dt}\,\frac{\partial \ddot{l}}{\partial \ddot{x}_k} \tag{27}$$

$$p_{k/1}=\frac{\partial\Theta}{\partial\dot{x}_k}+\frac{\hbar^2}{4m}\left[\ddot{l}\,\dot{l}^{-4}\frac{\partial\ddot{l}}{\partial\dddot{x}_k}+2\dddot{l}\dot{l}^{-5}\left(\frac{\partial\dot{l}}{\partial\dddot{x}_k}-2\frac{\partial\ddot{l}}{\partial\ddot{x}_k}\right)-\right.$$

$$\left.-\ddot{l}\,\dot{l}^{-4}\left(\frac{\partial\ddot{l}}{\partial\dot{x}_k}-\frac{d}{dt}\frac{\partial\ddot{l}}{\partial\dddot{x}_k}\right)\right] \tag{28}$$

$$p_{k/2}=p_{k\,(20)}=\frac{\partial L}{\partial\ddot{q}_k}=-\frac{\hbar^2}{4m}\ddot{l}\,\dot{l}^{-4}\frac{\partial\ddot{l}}{\partial\dddot{x}_k}. \tag{29}$$

We have the following relations

$$\begin{cases}\dot{l}=\left(\sum\limits_k\dot{x}_k^2\right)^{1/2}\\ \ddot{l}=\dot{l}^{-1}\sum\limits_k\dot{x}_k\ddot{x}_k\\ \dfrac{\partial\dot{l}}{\partial\dot{x}_k}=\dot{x}_k\left(\sum\limits_n\dot{x}_n^2\right)^{-1/2}=\dot{x}_k\dot{l}^{-1}\\ \dfrac{\partial\ddot{l}}{\partial\ddot{x}_k}=\dot{x}_k\left(\sum\limits_n\dot{x}_n^2\right)^{-1/2}=\dot{x}_k\dot{l}^{-1}\\ \dfrac{\partial\ddot{l}}{\partial\dot{x}_k}=\ddot{x}_k\dot{l}^{-1}-\dot{x}_k\dot{l}^{-2}\ddot{l}\\ -\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\ddot{l}}{\partial\dddot{x}_k}=-\ddot{x}_k\dot{l}^{-1}+\dot{x}_k\dot{l}^{-2}\ddot{l}.\end{cases} \tag{30}$$

Subsituting in (28) and (29) we obtain

$$p_{k/1}=\frac{\partial\Theta}{\partial\dot{x}_k}+\frac{\hbar^2}{4m}\ddot{l}\,\dot{l}^{-5}\dot{x}_k-2\dot{l}\,\dot{l}^{-6}\dot{x}_k) \tag{31}$$

$$p_{k/2}=-\frac{\hbar^2}{4m}\ddot{l}\,\dot{l}^{-5}\dot{x}_k. \tag{32}$$

The equation of motion (6) is then

$$\frac{\partial\Theta}{\partial x_k}-\frac{\partial V}{\partial x_k}-\frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial\dot{x}_k}-\frac{\hbar^2}{4m}\dddot{l}\,\dot{l}^{-5}\dot{x}_k-9\ddot{l}\,\ddot{l}\,\dot{l}^{-6}\dot{x}_k$$

$$+\ddot{l}\,\dot{l}^{-5}\dot{x}_k+12\dot{l}^3\dot{l}^{-7}\dot{x}_k-2\dot{l}^2\dot{l}^{-6}\dot{x}_k)=0, \tag{33}$$

which for $\dot{l}=\dot{x}_k=\dot{x}$ and $\Theta=m\dot{x}^2/2$ reduces to (4).

The Hamiltonian reads

$$H=\sum_k\frac{\partial\Theta}{\partial\dot{x}_k}\dot{x}_k+\frac{\hbar^2}{4m}\left(\ddot{l}\,\dot{l}^{-5}\sum_k\dot{x}_k^2-2\dddot{l}\dot{l}^{-6}\sum_k\dot{x}_k^2\right)-\frac{\hbar^2}{4m}\ddot{l}\,\dot{l}^{-5}\sum_k\dot{x}_k\ddot{x}_k+$$

$$+\frac{\hbar^2}{8m}\ddot{l}^2\dot{l}^{-4}-\Theta+V=\sum_k\frac{\partial\Theta}{\partial\dot{x}_k}\dot{x}_k-\Theta+\frac{\hbar^2}{4m}\ddot{l}\,\dot{l}^{-3}-\frac{5\hbar^2}{8m}\ddot{l}^2\dot{l}^{-4}+V. \tag{34}$$

Using

$$\begin{cases} \dot{l} = \dfrac{d\dot{l}}{dt} = \dfrac{d\dot{l}}{dl}\,\dot{l} \\ \ddot{l} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{d\dot{l}}{dl}\,\dot{l}\right) = \dfrac{d^2\dot{l}}{dl^2}\,\dot{l}^2 + \left(\dfrac{d\dot{l}}{dl}\right)^2 \dot{l} \end{cases} \tag{35}$$

(34) becomes

$$H = \sum_k \frac{\partial \Theta}{\partial \dot{x}_k}\,\dot{x}_k - \Theta + \frac{\hbar^2}{4m}\,\dot{l}^{-1}\frac{d^2\dot{l}}{dl^2} - \frac{3\hbar^2}{8m}\,\dot{l}^{-2}\left(\frac{d\dot{l}}{dl}\right) + V. \tag{36}$$

Now we make the following observations. Considering several identical „particles", or several identical motions of the same „particle", we can assert that the motion of a „particle" is perpendicular to the „surfaces" of equal velocities [13] and equal direction derivatives of the velocities, i.e.

$$\begin{cases} \dfrac{d\dot{l}}{dl} = |\nabla \dot{l}| \\ \dfrac{d^2\dot{l}}{dl^2} = \dfrac{d}{dl}\left(\dfrac{d\dot{l}}{dl}\right) = \left|\nabla\left(\dfrac{d\dot{l}}{dl}\right)\right| = \Delta\dot{l}. \end{cases} \tag{37}$$

The Hamiltonian gets then the form

$$H = \sum_k \frac{\partial \Theta}{\partial \dot{x}_k}\,\dot{x}_k - \Theta + \frac{\hbar^2}{4m}\,\dot{l}^{-1}\Delta\dot{l} - \frac{3\hbar^2}{8m}\,\dot{l}^{-2}\,(\nabla\dot{l})^2 + V. \tag{38}$$

Let us now discuss the magnitude Θ. In the presence of magnetic field Θ must be of the form [14]

$$\Theta = (m/2)\sum_k \dot{x}_k^2 + e\sum_k \dot{x}_k A_k \tag{39}$$

Thus we have

$$\sum_k \frac{\partial \Theta}{\partial \dot{x}_k}\,\dot{x}_k - \Theta = \frac{m}{2}\sum_k \dot{x}_k^2 = T. \tag{40}$$

This magnitude has to be considered, like previously, as the classical kinetic energy, therefore we can write [14]

$$T = (1/2m)\,(m\vec{v} - e\vec{A})^2. \tag{41}$$

But bearing in mind (24) we have further on

$$T = (1/2\,m)\,(\hbar\,\nabla\theta - e\vec{A})^2 \tag{42}$$

On the other hand, in view of the statistic image, we introduce in (38) a probability defined as follows: let be the probability of finding a „particle" on an element dl of trajectory proportional to the corresponding time dt, i.e.

$$dW = w\,dl = b\,dt = b\dot{l}^{-1}dl\,; \tag{43}$$

hence the probability density

$$w = b\dot{l}^{-1}. \tag{44}$$

Substituting now w with a^2, according to (23), the Hamiltonian reads

$$H=\frac{1}{2m}(\hbar\,\Delta\theta-e\vec{A})^2+\frac{\hbar^2}{4m}a^2\Delta a^{-2}-\frac{3\hbar^2}{8m}a^4(\nabla a^{-2})^2+V$$

or

$$H=\frac{1}{2m}(\hbar\nabla\theta-e\vec{A})^2-\frac{\hbar^2}{2m}a^{-1}\Delta a+V. \tag{45}$$

Equalizing the Hamiltonian to the energy we obtain

$$\frac{\hbar^2}{2m}(\nabla\theta)^2+\frac{e^2A^2}{2m}-\frac{\hbar e}{m}\vec{A}\nabla\theta-\frac{\hbar^2}{2m}a^{-1}\Delta a+V=E. \tag{46}$$

Some transformations yield

$$-\frac{\hbar^2}{2m}[2\Delta a-2(\nabla\theta)^2 a]-2\frac{\hbar e}{m}\vec{A}(\nabla\theta)a$$

$$+2\frac{e^2A^2}{2m}a+Va=Ea. \tag{47}$$

Adding and substracting

$$i(\Delta\theta)a+2i(\nabla\theta)(\nabla a)+i(\hbar e/2m)(\nabla\vec{A})a+i(\hbar e/m)\vec{A}\nabla a$$

the equation (47) may be split into two symmetric equations:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}[\Delta a+i(\Delta\theta)a-(\nabla\theta)^2 a+2i(\nabla\theta)(\nabla a)]+$$

$$+i\frac{\hbar e}{m}\vec{A}\nabla a+i\frac{\hbar e}{m}\vec{A}i(\nabla\theta)a+i\frac{\hbar e}{m}(\triangle\vec{A})a+$$

$$+\frac{e^2}{2m}A^2 a+Va=Ea. \tag{48}$$

and the complex conjugate.

Multiplying eq. (48) with $\exp i\theta$, and taking into account (22), one obtains

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi+i\frac{\hbar e}{m}\vec{A}(\nabla\psi)+i\frac{\hbar e}{2m}(\nabla\vec{A})\psi+\frac{e^2}{2m}A^2\psi$$

$$+V\psi=E\psi \tag{49}$$

which is easily recognized as being the Schrödinger equation in the presence of magnetic field.

V. The new mechanics proposed in references [11] [10] [1], and discussed in the present paper, has a deterministic character, as it has been made evident. This circumstance suggests to look for a relationship with Bohm's interpretation of quantum mechanics [15]. We show now that such a relationship exists.

Bohm's theory starts from the equations [15]

$$\frac{\partial R}{\partial t} = -\frac{1}{2m}\left[R\Delta S + 2(\nabla R)(\nabla S)\right]$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\left[\frac{1}{2m}(\nabla S)^2 + V - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\Delta R}{R}\right] \tag{50}$$

where R determines the quantum potential by

$$U_q = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\Delta R}{R} \tag{51}$$

and S is the action function.

On the other hand, the well known equation

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} \tag{52}$$

allows to write

$$H = -\int_1^2 \frac{\partial L}{\partial t}\, dt = -\frac{\partial}{\partial t}\int_1^2 L\, dt = -\frac{\partial S}{\partial t}. \tag{53}$$

Making $\vec{A}=0$ in (45) we can write (53) as

$$\frac{\hbar^2}{2m}(\nabla\theta)^2 - \frac{\hbar^2}{2m}\, a^{-1}\Delta a + V = -\frac{\partial S}{\partial t}. \tag{54}$$

Some simple algebraic transformations lead to

$$2\frac{\hbar^2}{2m}(\nabla\theta)^2 - 2\frac{\hbar^2}{2m}a^{-1}\Delta a + \frac{i}{2m}a(\Delta\theta) - \frac{i}{2m}a(\theta\Delta)$$

$$+2i\frac{1}{2m}(\nabla\theta)(\nabla a) - 2i\frac{1}{2m}(\nabla\theta)(\nabla a) + 2V =$$

$$= -2\frac{\partial S}{\partial t} + i\frac{\partial a}{\partial t} - i\frac{\partial a}{\partial t}. \tag{55}$$

Splitting (55) into two symmetric equations one obtains

$$\frac{\hbar^2}{2m}(\nabla\theta)^2 - \frac{\hbar^2}{2m}a^{-1}\Delta a - \frac{i}{2m}a\Delta\theta - 2i\frac{1}{2m}(\nabla\theta)(\nabla a) + V = -\frac{\partial S}{\partial t} + i\frac{\partial a}{\partial t} \tag{56}$$

and its complex conjugate.

Equating separately the real part and the imaginary part we obtain the equations

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left[a\Delta\theta + 2(\nabla\theta)(\nabla a)\right]$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \left[\frac{\hbar^2}{2m}(\nabla\theta)^2 - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\Delta a}{a} + V\right]. \tag{57}$$

Now, it suffices to make $\theta = S/\hbar$ and $a = R$ in (57) and the equations (50) are found again

REFERENCES

[1] Tussouff M., Lett. Nuovo Cimento, 1978, *23*, p. 599; Nuovo Cimento, 1979, *54 B*, p. 36.
[2] Borneas M., Am. J. Phys., 1959, *27*, p. 265.
[3] Borneas M., Acta Phys. Polon., 1963, *24*, p. 471.
[4] Koestler J. G., and Smith J. A., Am. J. Phys., 1965, *33*, p. 140.
[5] Borneas M., Phys Rev., 1969, *186*, p. 1299.
[6] Rodrigues L. M. C. S. and Rodrigues P. R., Am. J. Phys., 1970, *38*, p. 557.
[7] Riahi F., Am. J. Phys., 1972, *40*, p. 386.
[8] Anderson D., J. Phys. A, 1973, *6*, pp. 299 and 1129; Lett. Nuovo Cimento, 1973, *7*, p. 317.
[9] Mušicki D., J. Phys. A, 1978, *11*, p. 39; Publ. Inst. Math. (Beograd), 1978, *23 (37)*, p. 141.
[10] Borneas M. and Kalman E., Studii și cercetări de fizică, 1955, *6*, p. 299.
[11] Borneas M., Studii și cercetări de fizică, 1955, *6*, p. 427.
[12] Blohinţev D. I., *Bazele mecanicii cuantice* (translation from Russian), Ed. tehnică, București, 1954, p. 103.
[13] Plăcinţeanu I., *Vectori, potențiali, tensori*, Ed. A. Gheorghiu, Iași, 1942.
[14] Spolski E. V., *Fizica atomică* (translation from Russian), Ed. tehnică, București, 1952, Vol. I.
[15] Bohm D., Phys. Rev. 1952 *85*, p. 166.

F7414

BULETINUL ȘTIINȚIFIC ȘI TEHNIC AL INSTITUTULUI POLITEHNIC „TRAIAN VUIA" TIMIȘOARA

MATEMATICĂ—FIZICĂ

Tomul 26 (40) Fascicola 2

IULIE–DECEMBRIE
1981

Cititorii din străinătate se pot abona prin

ILEXIM,

Serv. Export-import presă – Press Department

str. 30 Decembrie nr. 3–5 – P.O.B. 136–137

Bucharest – Romania